



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**  
PROGRAMA DE MAESTRÍA Y DOCTORADO EN CIENCIAS MATEMÁTICAS Y  
DE LA ESPECIALIZACIÓN EN ESTADÍSTICA APLICADA

LA DINÁMICA DE UN VEHÍCULO ARTICULADO DE N-TRAILERS.

TESIS QUE PARA OPTAR POR EL GRADO DE: MAESTRÍA EN MAESTRO EN  
CIENCIAS MATEMÁTICAS

PRESENTA:  
ALEJANDRO BRAVO DODDOLI

DIRECTOR DE TESIS  
DR. LUÍS GARCIA NARANJO IMASS

CIUDAD UNIVERSITARIA, JUNIO DE 2016

# Índice general

<b>1. Mecánica con restricciones</b>	<b>4</b>
1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange con restricciones . . . . .	4
1.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange con restricciones holónomas . . . . .	5
1.1.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange con restricciones no holónomas . . . . .	7
1.2. Ecuaciones de Hamel . . . . .	8
1.2.1. Ecuaciones de Hamel con restricciones holónomas . . . . .	8
1.2.2. Ecuaciones de Hamel con restricciones no holónomas . . . . .	11
<b>2. Planteamiento del problema.</b>	<b>14</b>
2.1. Cinemática . . . . .	14
2.2. Dinámica . . . . .	15
2.3. Simetrías . . . . .	17
<b>3. Ecuaciones de movimiento</b>	<b>19</b>
3.1. Deducción de las ecuaciones de movimiento . . . . .	19
3.1.1. Conservación de la energía y el flujo sobre subvariedades de energía constante. . . . .	27
3.2. Clasificación y linealización de los puntos de equilibrio. . . . .	28
3.2.1. Clasificación de los puntos de equilibrio . . . . .	28
3.2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio. . . . .	30
3.3. El caso $a = 0$ . . . . .	31
3.4. El caso de un trailer. . . . .	33
<b>A. Configuraciones Singulares</b>	<b>39</b>



# Introducción

Estudiaremos la dinámica de un vehículo articulado, que se mueve bajo su propia inercia. El sistema consiste de un carro esta enganchado a un convoy de  $n$  trailers. Interpretaremos el sistema como el carro porta equipaje del aeropuerto, este es un problema de la mecánica no holónoma dado que el carro y los  $n$  trailers están sujetos a  $(n+1)$  restricciones no holónomas, una por cada cuerpo. La idea es que el carro y los trailers no pueden moverse en la dirección perpendicular a sus ruedas. Esto recuerda el problema del trineo de Chaplygin, el cual es un caso particular del nuestro para  $n = 0$  y con una condición extra en los parámetros, lo cual se discutirá más adelante. Este problema es de interés dentro del marco de la teoría de control.

La tesis está organizada de la siguiente manera; En el Capítulo 1 recordaremos la formulación Lagrangiana de la mecánica en sus distintos casos y deduciremos las ecuaciones de Hamel. En el Capítulo 2 intruduciremos el sistema y la notación que seguiremos en nuestro trabajo. Discutiremos cuál es el espacio de configuraciones, las restricciones no holónomas y escribiremos la eneregía cinética del sistema. También discutiremos las simetrías del sistema bajo la acción del grupo euclidiano  $SE(2)$  y definiremos el espacio reducido bajo la acción del grupo. Por último, en el Capítulo 3 encontraremos las ecuaciones de movimiento reducidas esta es la formulación de Hamel. Mostraremos que los niveles de energía son toros de dimensión  $(n+1)$  y daremos una expresión del sistema en cada uno de ellos. Clasificaremos los puntos de equilibrio usando la aproximación lineal del campo vectorial. Posteriormente trataremos el caso donde el centro de masa del primer carro coincide con el punto donde se engancha a su antecesor, encontraremos que, en este caso, el sistema tiene una constante de movimiento extra. Haremos un estudio exhaustivo del caso  $n = 1$ . Finalmente, en el Apéndice se discutirá el interés del problema en relación con el grado de holonomía en distribuciones.

# Capítulo 1

## Mecánica con restricciones

### 1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange con restricciones

Para sentar las bases del trabajo empezaremos deduciendo el formalismo de la mecánica Lagrangeana. Consideremos una variedad diferenciable  $Q$  de dimensión  $n$  con coordenadas locales  $(q_1, \dots, q_n)$ , en mecánica llamado espacio de configuraciones. De forma natural podemos considerar  $TQ$  el haz tangente de  $Q$  y en el podemos definir la función Lagrangiana  $\mathcal{L} : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  la cual está definida como  $\mathcal{L} := K - V$  donde  $K$  es la energía cinética y  $V$  es la energía potencial. Algunos sistemas mecánicos tienen restricciones, como por ejemplo, el péndulo plano, aunque como sistema físico vive en  $\mathbb{R}^2$ , las posiciones admisibles del sistema tienen que cumplir la ecuación de un círculo. Esto nos dice que la velocidad de la masa es tangentes a este, por lo tanto las velocidades admisibles del sistema son un subespacio del espacio tangente a  $\mathbb{R}^2$  con lo que definimos el espacio de velocidades admisibles  $\mathcal{D}$ , el cual es una distribución definida en  $\mathbb{R}^2$ , por lo que si  $v \in \mathcal{D}_q$  donde  $q = (x, y)$  es un punto que cumple la ecuación  $x^2 + y^2 = r^2$ , tenemos

$$0 = dr^2(v) = d(x^2 + y^2)(v) = 2(xdx + ydy)(v).$$

Concluimos que las restricciones en las posiciones nos definen restricciones lineales y homogéneas en las velocidades a través de *uno – formas* y el núcleo de éstas define el espacio de velocidades admisibles del sistema las cuales son una distribución  $\mathcal{D}$  sobre  $M$ .

Un segundo ejemplo es un trineo que se desliza sin resbalar en el hielo sobre una cuchilla donde el sistema tiene la restricción de que el trineo no se puede mover en la dirección perpendicular a la cuchilla. En este, caso las restricciones del sistema están sobre las velocidades, las restricciones son lineales y homogéneas, es decir en términos de una *uno – forma*, lo que nos define una distribución,  $\mathcal{D}$ , de velocidades admisibles.

Un sistema mecánico consta de un espacio de configuraciones  $Q$ , una función Lagrangiana  $\mathcal{L}$  y una distribución  $\mathcal{D}$  de velocidades admisibles, la cual está definida como la intersección del núcleo de formas diferenciales  $\beta^\alpha$  linealmente independientes con  $\alpha = 0, 1, \dots, k$  las cuales están dadas por las restricciones, con lo cual si  $v = (\dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n) \in \mathcal{D}$  en coordenadas locales tenemos

$$0 = \beta^\alpha(v) = \beta_i^\alpha \dot{q}^i. \tag{1.1}$$

Las ecuaciones de movimiento para un sistema mecánico (Segunda Ley de Newton) son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = R_i, \text{ con } i = 1, \dots, n \quad (1.2)$$

donde  $R_i$  son las fuerzas de reacción y todas las fuerzas físicas son conservativas.

Para determinar  $R_i$  usamos el Principio de D'Alembert según el cual si  $R_i$  no realiza trabajo sobre los desplazamientos virtuales es decir, si  $v$  satisface (1.2) entonces  $R_i \dot{q}^i = 0$  lo cual implica que para ciertos escalares  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$  se satisfacen las siguientes igualdades  $R_i = \lambda_\alpha \beta_i^\alpha$ . Con esto podemos reescribir las ecuaciones de movimiento como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} &= \lambda_\alpha \beta_i^\alpha \text{ con } i = 1, \dots, n \\ \beta_i^\alpha \dot{q}^i &= 0 \text{ con } \alpha = 1, \dots, k \end{aligned} \quad (1.3)$$

Este es un sistema completo para determinar  $(q, \dot{q})$  y  $\lambda$ .

### 1.1.1. Ecuaciones de Euler-Lagrange con restricciones holónomas

Supongamos que  $\beta_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i}$  para ciertas funciones  $f^\alpha : Q \rightarrow \mathbb{R}$ . Con esto podemos reescribir la ecuaciones (1.1) como

$$f^\alpha(q) = cte \quad \alpha = 1, \dots, k. \quad (1.4)$$

Recíprocamente, una restricción de la forma (1.4) implica las ecuaciones (1.1) con

$$\beta_i^\alpha = \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i}.$$

En estos casos tenemos restricciones *exclusivamente* en las posiciones. Este tipo de restricciones se llaman holónomas. Para este caso las ecuaciones de movimiento se reescriben como

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} &= \lambda_\alpha \frac{\partial f^\alpha}{\partial q^i} \text{ con } i = 1, \dots, n \\ f^\alpha(q) &= c^\alpha. \end{aligned} \quad (1.5)$$

Como puede revisarse en e.g. [5], estas ecuaciones son equivalentes a la ecuación variazional  $\delta \int \mathcal{L} dt = 0$ , donde  $\delta$  es la primera variación sujeto a restricciones.

Las relaciones  $f^\alpha = c^\alpha$  definen una subvariedad  $\widehat{Q} \subset Q$  de dimensión  $n - k$ , con coordenadas  $s^1, \dots, s^{n-k}$ , cuyo planos tangente coincide con  $\mathcal{D}$ . Podemos definir  $\widehat{\mathcal{L}} := \mathcal{L}|_{T\widehat{Q}}$  donde  $|_{T\widehat{Q}}$  denota la restricción de la Lagrangiana a  $T\widehat{Q}$ , entonces las ecuaciones de movimiento son equivalentes a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{s}^i} \right) - \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial s^i} = 0 \text{ con } i = 1, \dots, n - k. \quad (1.6)$$

**Ejemplo 1.1.1.** *Péndulo plano bajo la fuerza de la gravedad; es decir,  $Q = \mathbb{R}^2$  con coordenadas locales  $(x, y)$  entonces*

$$\mathcal{L}(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) - mgy. \quad (1.7)$$

*Y la función  $f(x, y) = x^2 + y^2 = r^2$ . Ya completos nuestros ingredientes tenemos que las ecuaciones de movimiento son*

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \lambda x \\ \ddot{y} + mg &= \lambda y \\ x^2 + y^2 &= r^2. \end{aligned} \quad (1.8)$$

*Ahora derivando con respecto al tiempo la tercera ecuación dos veces, llegamos a*

$$\ddot{x}x + \ddot{y}y + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0.$$

*Al sustituir aquí las primeras dos ecuaciones y despejar  $\lambda$ , obtenemos la relación*

$$\lambda = \frac{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + mgy}{r}.$$

*$\lambda$  se interpreta como la fuerza de tensión. A continuación si sustituimos el valor de  $\lambda$  en las primeras dos ecuaciones, con esto eliminamos  $\lambda$  para dejar un sistema de dos ecuaciones de segundo orden con dos incógnitas. Estas ecuaciones tienen como primera integral  $x\dot{x} + y\dot{y}$ .*

*Como lo mencionamos antes, la restricción  $x^2 + y^2 = r^2$  define una subvariedad  $\widehat{Q}$  cuyo plano tangente concide con la distribución de velocidades admisibles; en este caso podemos parametrizar a ésta con  $(x, y) = (r \sin \theta, -r \cos \theta)$  con lo cual la función Lagrangiana queda dada por*

$$\mathcal{L}|_{T\widehat{Q}} = \frac{m}{2}(r^2\dot{\theta}) + mg \cos \theta.$$

*Aplicando las ecuaciones (1.6) tenemos*

$$mr^2\ddot{\theta} + mg \sin \theta = 0$$

*la cual es la familiar ecuación del péndulo enseñada en los cursos básicos cuya deducción también puede hacerse usando la segunda ley de Newton.*

Este método es hoy todavía enseñado en cursos básicos de mecánica analítica. El problema de esta forma de plantear las ecuaciones en un sistema con  $n$  coordenadas y  $k$  restricciones es que tenemos que resolver un sistema de  $n$  ecuaciones diferenciales de segundo orden y  $k$  ecuaciones algebraicas, lo cual hace que en la mayoría de los casos sea un problema bastante difícil de atacar. El lector con todo derecho podrá pensar: para qué nos preocupamos en usar los multiplicadores de Lagrange, si podemos estudiar el sistema en coordenadas locales a la subvariedad y utilizar las ecuaciones (1.6), en vez de resolver un sistema de ecuaciones con  $n$  ecuaciones diferenciales y  $k$  ecuaciones algebraicas, solo resolvemos un sistema de  $n - k$  ecuaciones diferenciales lo cual parece ser mucho más natural y fácil. El problema de esto es que en general nada nos asegura que podamos elegir unas coordenadas tan buenas para el sistema como el caso de las coordenadas polares en el péndulo plano, ya que en general tendremos  $k$  ecuaciones algebraicas que satisfacer y encontrar coordenadas locales a esa subvariedad puede ser tan difícil en términos computacionales como resolver las ecuaciones para obtener los multiplicadores de Lagrange.

### 1.1.2. Ecuaciones de Euler-Lagrange con restricciones no holónomas

El caso en que la distribución  $\mathcal{D}$  es no integrable corresponde a la mecánica no holónoma. Sabemos que en este caso no hay principio variacional, el lector podrá revisar esto en [1] y que no existe ninguna subvariedad cuyo plano tangente sea las distribución de velocidades admisibles  $\mathcal{D}$ , es decir  $\mathcal{D}$  no es integrable. Las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} &= \lambda_\alpha \beta_i^\alpha \text{ con } i = 1, \dots, n \\ \beta_i^\alpha \dot{q}^i &= 0. \end{aligned}$$

**Ejemplo 1.1.2.** *Trineo de Chaplygin: Este problema consta de un cuerpo rígido que se desliza en el hielo sin resbalar, libre de fuerzas. El trineo se desliza sobre una cuchilla lo cual define la restricción de que el trineo no se puede desplazar en la dirección perpendicular a la cuchilla. En este caso  $Q = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}$  con coordenadas locales  $(x, y, \theta)$ ,*

$$\mathcal{L}(x, y, \theta, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}) = \frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{J}{2}\dot{\theta}. \quad (1.9)$$

La uno – forma que define la distribución es  $\beta = -\sin \theta dx + \cos \theta dy$ , por lo tanto una base para  $\mathcal{D}$  es

$$\begin{aligned} z_1 &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} \\ z_2 &= \frac{\partial}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

Por lo que si  $v \in \mathcal{D}$  entonces podemos ver a  $v$  como combinación lineal de la base  $v = uz_1 + \omega z_2$ .

Para este sistema mecánico, las ecuaciones de movimiento son

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -\lambda \sin \theta \\ m\ddot{y} &= \lambda \cos \theta \\ J\ddot{\theta} &= 0 \\ -\sin \theta \dot{x} + \cos \theta \dot{y} &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Derivando con respecto al tiempo la última ecuación tenemos, la siguiente relación

$$\dot{\theta}(-\cos \theta \dot{x} - \sin \theta \dot{y}) - \sin \theta \ddot{x} + \cos \theta \ddot{y} = 0 \quad (1.11)$$

Si sustituimos las primeras dos ecuaciones de movimiento en (1.11) tenemos

$$\dot{\theta} \cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y} = \lambda.$$

Con esto podemos sustituir en las ecuaciones (1.10) para eliminar  $\lambda$  obtenemos

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= \dot{\theta}(-\dot{x} \sin(\theta) \cos(\theta) - \dot{y} \sin^2(\theta)) \\ \ddot{y} &= \dot{\theta}(\dot{x} \cos^2(\theta) + \dot{y} \sin(\theta) \cos(\theta)) \\ \ddot{\theta} &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$



Una vez mas esta forma de atacar el problema es muy complicada por lo que hay que usar más geometría. El término  $\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y}$  es la componente lineal de la velocidad en la dirección de la cuchilla, esta cantidad física es importante por lo que le llamaremos  $u$ , la componente de la velocidad perpendicular a la cuchilla le llamaremos  $v = -\sin \theta \dot{x} + \cos \theta \dot{y}$ , y ésta es naturalmente cero; por ultimo definimos  $\omega = \dot{\theta}$ . Derivando estas expresiones llegamos a

$$\begin{aligned}\dot{u} &= \ddot{x} \cos(\theta) + \ddot{y} \sin(\theta) + \dot{\theta}(-\sin \theta \dot{x} + \cos \theta \dot{y}) \\ \dot{v} &= -\ddot{x} \sin \theta + \ddot{y} \cos \theta - \dot{\theta}(\cos \theta \dot{x} + \sin \theta \dot{y}) \\ \dot{\omega} &= \ddot{\theta}\end{aligned}$$

Si sustituimos las ecuaciones (1.12) en estas últimas, tenemos

$$\begin{aligned}\dot{u} &= v \\ \dot{v} &= 0 \\ \dot{\omega} &= 0\end{aligned}$$

Pero  $v = 0$ , por lo que concluimos que  $u = u_0$  es constante y también que  $\dot{\theta} = \omega_0$  por lo tanto  $\theta = \omega_0 t + \theta_0$ . Despejando  $\dot{x}, \dot{y}$  en términos de  $u, v$  obtenemos las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}\dot{x} &= u_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) - v \sin(\omega_0 t + \theta_0) = u_0 \cos(\omega_0 t + \theta_0) \\ \dot{y} &= u_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0) + v \cos(\omega_0 t + \theta_0) = u_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0)\end{aligned}$$

con esto es fácil ver que la trayectoria del trineo son círculos de radio  $\frac{u_0}{\omega_0}$  si  $\omega \neq 0$  y líneas rectas en el caso contrario. Por ultimo notemos que la fuerza de constricción no realiza trabajo ya que

$$V \cdot F_c = (u_0 \cos \theta, u_0 \sin \theta) \cdot \lambda(-\sin \theta, \cos \theta) = 0.$$

El caso de la mecánica no holónoma es mas difícil por el hecho de que  $\mathcal{D}$  es no integrable, esto quiere decir que no existe una subvariedad cuyos planos tangentes estén contenidos en el núcleo de las diferenciales, por lo que no podemos aspirar a encontrar una subvariedad. Pero inspirados en el ejemplo, tal vez no podamos restringir las coordenadas a una subvariedad, pero sí podemos restringir las velocidades del sistema a la distribución de velocidades admisibles, para tratar de encontrar unas nuevas ecuaciones tipo Euler-Lagrange, pero sobre la distribución estas son las llamadas ecuaciones de Hamel. Esta idea novedosa será desarrollada a continuación de manera teórica y usada para encontrar las ecuaciones de movimiento del problema que a continuación se presentará. Este trabajo será la búsqueda de las coordenadas naturales para plantear el problema, en este caso las coordenadas no serán para una variedad si no para una distribución pero siempre llevados por seguir la máxima moraleja de la mecánica, La Mecánica es el arte de elegir las coordenadas adecuadas.

## 1.2. Ecuaciones de Hamel

### 1.2.1. Ecuaciones de Hamel con restricciones holónomas

Consideremos una variedad Riemanniana  $(Q, g)$  de dimensión  $n$ , con coordenadas locales dadas por  $(q^1, \dots, q^n)$  en una vecindad de un punto  $q \in Q$ ; la forma natural de construir el

espacio tangente a  $Q$  en  $q$  es tomando como base de  $T_qQ$  al conjunto de vectores  $\{\frac{\partial}{\partial q^i}\}$ , por lo que si  $V \in TQ$  entonces  $V = \dot{q}^i \frac{\partial}{\partial q^i}$  con lo cual podemos darles coordenadas locales al haz tangente de  $Q$  como  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$ ; lo cual fue como se procedió en los ejemplos 1.1.1 y 1.1.2. Pero esta no es la única forma de construir coordenadas a  $T_qQ$ , podemos tomar  $n$  campos vectoriales  $\{Z_i(q)\}$  linealmente independientes es decir una base de  $T_qQ$ . Este estudio es local dado que los campos están definidos de manera local, por lo tanto el vector  $V \in T_qQ$  ahora lo podemos ver como  $V = v^k Z_k(q)$  y podemos ver a  $TQ$  en las nuevas coordenadas como  $(q^1, \dots, q^n, v^1, \dots, v^n)$ , la colección de campos  $\{Z_i(q)\}$  es llamado un marco móvil, las  $v^k$  son llamadas cuasi velocidades y podemos tomar estos campos de forma que tomen en cuenta simetrías del problema.

La diferencia fundamental con las velocidades es que el marco móvil  $\{\frac{\partial}{\partial q^i}\}$  es generado por coordenadas y en general un marco  $\{Z_i(q)\}$  no puede ser generado por coordenadas, basta pensar en el caso en que la distribución no es todo  $TQ$  y es no integrable. Aquí será crucial definir las funciones  $C_{i,j}^k : Q \rightarrow \mathbb{R}$ , que cumplen la relación

$$[Z_i, Z_j] = C_{ij}^k Z_k, \quad (1.13)$$

don  $[\cdot, \cdot]$  es el corchete de Lie de campos vectoriales. Dichos coeficientes serán llamados *coeficientes de estructura* y son comúnmente usados en teoría de distribuciones. Denotaremos por  $\{\mu^i(q)\}$  el marco dual a  $\{Z_i(q)\}$  los cuales cumplen la relación

$$\langle \mu^i(q), Z_j(q) \rangle = \delta_j^i, \quad (1.14)$$

de igual forma que al marco  $\{\frac{\partial}{\partial q^i}\}$  le corresponde el marco dual  $\{dq^i\}$ , lo que nos lleva a definir la relación

$$Z_j = \rho_j^k \frac{\partial}{\partial q^k} \quad \mu^i = \sigma_k^i dq^k, \quad (1.15)$$

donde  $\rho_j^k, \sigma_k^i : Q \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones suaves. Gracias a (1.14) tenemos que  $\sigma_k^i \rho_j^k = \delta_j^i$ , por lo tanto son matrices inversas y tenemos de manera natural

$$\sigma_k^i Z_i = \frac{\partial}{\partial q^k} \quad \rho_j^k \mu^j = dq^k. \quad (1.16)$$

el hecho de que  $V = v^k Z_k(q)$  nos da la siguiente relación

$$\dot{q}^j = \rho_j^k v^k, \quad (1.17)$$

nuestro último ingrediente son las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} \quad (1.18)$$

Con esto ya estamos listos para deducir las ecuaciones de Hamel, lo cual será un ejercicio de repasar la regla de la cadena. La Lagrangiana está definida en términos de las coordenadas  $(q^1, \dots, q^n, \dot{q}^1, \dots, \dot{q}^n)$  al igual que en los ejemplos 1.1.1 y 1.1.2.

$$\widehat{\mathcal{L}}(q, v) = \mathcal{L}(q, \rho_j^k v^k) = \mathcal{L}(q, \dot{q}) \quad (1.19)$$

Al derivar tenemos que

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \rho_i^k \quad , \quad \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q^k} v^\ell \quad (1.20)$$

derivando con respecto  $t$  el lado izquierdo tenemos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^i} \right) = \left( \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \right) \rho_i^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \left( \frac{\partial \rho_i^k}{\partial q^j} \dot{q}_j \right) \quad (1.21)$$

Usando las ecuaciones de Euler-Lagrange y las ecuaciones 1.17 vemos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^i} \right) = \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} \right) \rho_i^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q^k} \rho_\ell^k v^\ell \right) \quad (1.22)$$

Despejando de la ecuación derecha de 1.20 el término  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}$  llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^i} \right) = \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q^k} v^\ell \right) \rho_i^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q^k} \rho_\ell^k v^\ell \right) = \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \rho_i^k - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} v^\ell \left( \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q^k} \rho_i^k - \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q^k} \rho_\ell^k \right) \quad (1.23)$$

Basta calcular una expresión local de las funciones  $C_{ij}^k$  definidas en 1.13 para concluir

$$[Z_\ell, Z_i] = - \left( \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q^k} \rho_i^k - \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q^k} \rho_\ell^k \right) \frac{\partial}{\partial q^j} = -\sigma_j^m \left( \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q^k} \rho_i^k - \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q^k} \rho_\ell^k \right) X_m$$

y por lo tanto

$$C_{li}^m = -\sigma_j^m \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q^k} \rho_\ell^k - \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q^k} \rho_i^k \right). \quad (1.24)$$

Ahora si despejamos el término  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k}$  de la ecuación izquierda de 1.20 para sustituir en 1.23 obtenemos que,

$$= \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \rho_i^k - \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^m} \sigma_j^m v^i \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q^k} \rho_\ell^k - \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q^k} \rho_i^k \right) = \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \rho_i^k - \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^m} v^i C_{li}^m.$$

por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^i} \right) = \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \rho_i^k - \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial \dot{q}^m} v^\ell C_{li}^m. \quad (1.25)$$

Estas son las ecuaciones de Hamel, con  $i = 1, \dots, n$ .

### 1.2.2. Ecuaciones de Hamel con restricciones no holónomas

Con las ideas ya claras en como se procederá deduciremos las ecuaciones de Hamel para sistemas no holónomos; ahora el espacio de velocidades admisibles del sistema no es todo el haz tangente si no la distribución  $\mathcal{D}$  la cual tiene rango  $r$  y una base local  $\{Z_i\}$ , completando una base para el espacio tangente  $T_qQ$  con  $\{Y_i\}$  donde  $i = 1, \dots, n-r$ , nosotros denotaremos el marco móvil  $\{Z_\alpha, Y_a\}$  donde los índices  $\alpha = 1, \dots, r$  y  $a = 1, \dots, n-r$ . De manera natural cualquier vector  $V$  en  $T_qQ$  lo podemos ver como  $V = v^\alpha Z_\alpha + u^a Y_a$ , por lo tanto  $v^\alpha, u^a$  son las cuasi-velocidades correspondientes y también tenemos el marco dual  $\{\mu^\alpha, \nu^a\}$ . Las ecuaciones equivalentes a 1.15 en este caso son;

$$\begin{aligned} Z_\alpha &= \rho_\alpha^k \frac{\partial}{\partial q^k} & \mu_k^\alpha &= \sigma^\alpha dq^k, \\ Y_a &= \rho_a^k \frac{\partial}{\partial q^k} & \nu^a &= \sigma_k^a dq^k, \end{aligned} \quad (1.26)$$

por lo tanto

$$\dot{q}^k = \rho_\alpha^k v^\alpha + \rho_a^k u^a$$

De forma similar tenemos

$$\frac{\partial}{\partial q^k} = \sigma_k^\alpha Z_\alpha + \sigma_k^a Y_a$$

Las ecuaciones de Euler-Lagrange en este caso son

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^i} = R_i \quad y \quad b_i^a \rho_\alpha^i = 0 \quad (1.27)$$

donde el lado izquierdo son las ecuaciones de Euler-Lagrange igualadas a las fuerzas de restricción y las ecuaciones del lado derecho es pedir que los campos  $X_\alpha$  es cumplan las restricciones. Las restricciones no holónomos podemos escribirlas como  $u^a = 0$  para  $a = 1, \dots, n-r$ . por lo tanto  $(q^i, v^\alpha)$  sirven de coordenadas locales para  $\mathcal{D} \subset TQ$ . La idea será restringir  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{D}_q$  de forma análoga; definimos  $\widehat{\mathcal{L}}(q^i, v^\alpha, u^a) = \mathcal{L}(q^i, \dot{q}^i)$ , usando las regla de la cadena tenemos que

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \rho_\alpha^k, \quad \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial u^a} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} \rho_a^k, \quad \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} \left( \frac{\partial \rho_\alpha^j}{\partial q^k} v^\alpha + \frac{\partial \rho_a^j}{\partial q^k} u^a \right). \quad (1.28)$$

Usando las ecuaciones de Lagrange-D'Alembert y el hecho de que las fuerzas de reacción no hacen trabajo, de forma análoga a la deducción de las ecuaciones de Hamel en la seccion anterior tenemos que

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^\alpha} \right) = \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \rho_\alpha^k + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} v^\beta \left( \frac{\partial \rho_\beta^j}{\partial q^k} \rho_\alpha^k - \frac{\partial \rho_\alpha^j}{\partial q^k} \rho_\beta^k \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} u^a \left( \frac{\partial \rho_\alpha^j}{\partial q^k} \rho_a^k - \frac{\partial \rho_\alpha^j}{\partial q^k} \rho_a^k \right). \quad (1.29)$$

Como el lector recordará, el siguiente paso para demostrar la formula de Hamel fue calcular las funciones  $C_{ij}^n$  en coordenadas locales, el hecho importante a remarcar aquí es que a comparación del caso anterior  $[Z_i, Z_j] \notin \mathcal{D}$ , por lo que al expresar el conmutador en la base  $\{Z_\alpha, Y_a\}$  obtenemos

$$[Z_i, Z_\ell] = - \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q_k} \rho_\ell^k - \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q_k} \rho_i^k \right) \frac{\partial}{\partial q^j} = -\sigma_j^\alpha \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q_k} \rho_\ell^k - \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q_k} \rho_i^k \right) X_\alpha - \sigma_j^a \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q_k} \rho_\ell^k - \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q_k} \rho_i^k \right) Y_a$$

El problema aquí es bajo que criterio escoger las funciones  $C_{ij}^m$ , sin perder las información fuera de  $\mathcal{D}$ . Hasta ahora solo usamos la estructura diferenciable de la variedad, gracias a la métrica riemanniana dada por la energía cinética podemos considerar la descomposición de  $T_q Q = \mathcal{D} \oplus \mathcal{D}^\perp$  y la proyección ortogonal  $P : T_q Q \rightarrow \mathcal{D}$  dada por la métrica riemanniana, con lo que definimos  $C_{ij}^m$  como las funciones que cumplen la relación

$$C_{ij}^m Z_m = P([Z_i, Z_j]). \quad (1.30)$$

Usando esto podemos encontrar una expresión local de  $C_{ij}^m$ , simplemente considerando a  $\{Y_a\}$  una base del complemento ortogonal a  $\mathcal{D}$  con lo cual

$$P([Z_i, Z_j]) = -\sigma_j^\alpha \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q_k} \rho_\ell^k - \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q_k} \rho_i^k \right) Z_\alpha,$$

con lo que concluimos que

$$C_{ij}^\alpha = -\sigma_j^\alpha \left( \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q_k} \rho_\ell^k - \frac{\partial \rho_\ell^j}{\partial q_k} \rho_i^k \right). \quad (1.31)$$

Con esto rescribimos

$$[Z_i, Z_j] = C_{ij}^\alpha X_\alpha + C_{ij}^a Y_a.$$

Despejando de  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^\alpha}$  de la ecuación 1.28 para sustituir en 1.29 obtenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^\alpha} \right) &= \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \rho_i^k + \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^\gamma} \sigma_k^\gamma v^\beta \left( \frac{\partial \rho_\beta^j}{\partial q^k} \rho_i^k - \frac{\partial \rho_i^j}{\partial q^k} \rho_\beta^k \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} u^a \left( \frac{\partial \rho_\alpha^j}{\partial q^k} \rho_a^k - \frac{\partial \rho_\alpha^j}{\partial q^k} \rho_a^k \right) \\ &= \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \rho_i^k + \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^\gamma} v^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma + \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial u^a} v^\beta C_{\alpha\beta}^a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^j} u^a \left( \frac{\partial \rho_\alpha^j}{\partial q^k} \rho_a^k - \frac{\partial \rho_\alpha^j}{\partial q^k} \rho_a^k \right). \end{aligned} \quad (1.32)$$

Ahora es cuando restringimos a  $\mathcal{D}$ , es decir tomar  $u^a = 0$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^\alpha} \Big|_{u^a=0} \right) = \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \Big|_{u^a=0} \right) \rho_i^k + \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^\gamma} \Big|_{u^a=0} \right) v^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma + \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial u^a} \Big|_{u^a=0} \right) v^\beta C_{\alpha\beta}^a \quad (1.33)$$

Ahora definimos la lagrangiana de constricción  $\mathcal{L}_c$  como la restricción de  $\mathcal{L}$  a  $\mathcal{D}$ , es decir  $\mathcal{L}_c = \mathcal{L}|_{\mathcal{D}}$  entonces podemos escribir  $\mathcal{L}_c(q^i, v^\alpha) = \mathcal{L}(q^i, v^\alpha, u^a)$ , con esto tenemos las identidades

$$\left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial v^\alpha} \Big|_{u^a=0} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial v^\alpha}, \quad \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial q^k} \Big|_{u^a=0} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial q^k}$$

Con esto la ecuación 1.29 se convierte en

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial v^\alpha} \Big|_{u^a=0} \right) = \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial q^k} \Big|_{u^a=0} \right) \rho_\alpha^k + \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial v^\gamma} \Big|_{u^a=0} \right) v^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma + \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^a} \Big|_{u^a=0} \right) v^\beta C_{\alpha\beta}^a.$$

Por último falta notar que  $\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial u^a} \Big|_{u^a=0}$ , ya que  $\frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial u^a} \Big|_{u^a=0} = \frac{\partial}{\partial u^a} \mathcal{L}_c(q^i, u^\alpha, 0)$ , con esto obtenemos el resultado buscado.

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial v^\alpha} = \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial q^k} \rho_\alpha^k + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial v^\gamma} v^\beta C_{\alpha\beta}^\gamma \quad (1.34)$$

# Capítulo 2

## Planteamiento del problema.

la notación a continuación se definirá es la misma de los artículos [10, 16]. Consideremos el acoplamiento  $n + 1$  carros  $(\mathcal{B}_0, \mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_n)$  sin fuerza motriz. Los trailers forman un convoy que se mueve sobre el plano (ver la Figura 2.1 para el caso  $n = 2$ ).

Cada carro del convoy tiene dos pares de ruedas; denotaremos por  $(x_i, y_i)$  el punto medio del eje del carro ( $i = 0, \dots, n$ ) con respecto a la elección de los ejes cartesianos. La orientación de  $\mathcal{B}_i$  está determinada por el ángulo  $\theta_i$  formado por el eje del carro y el eje  $x$  del marco elegido (ver la Figura 2.1).

### 2.1. Cinemática

Las restricciones holónomas del sistema están dadas por el hecho de que el carro  $\mathcal{B}_i$  está enganchado al predecesor  $\mathcal{B}_{i-1}$  por una varilla, donde asumimos que estas son de largo  $\ell$ . Idealizando el problema, la varilla no tiene masa y es rígida, por otro lado el eje de cada carro tiene la restricción de tener la misma orientación que la varilla que engancha su carro con el predecesor, por lo tanto las coordenadas  $(x_i, y_i)$  están relacionadas con  $(x_{i-1}, y_{i-1})$  por las ecuaciones (ver Figura),

$$(x_i, y_i) + \ell(\cos \theta_i, \sin \theta_i) = (x_{i-1}, y_{i-1}), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2.1)$$

que definen  $2n$  restricciones holónomas.

Por otro lado, las ruedas de cada coche imponen la restricción no holónoma, la cual implica que ningún carro puede moverse en dirección perpendicular a su eje<sup>1</sup>, con lo que tenemos  $n + 1$  restricciones no holónomas.

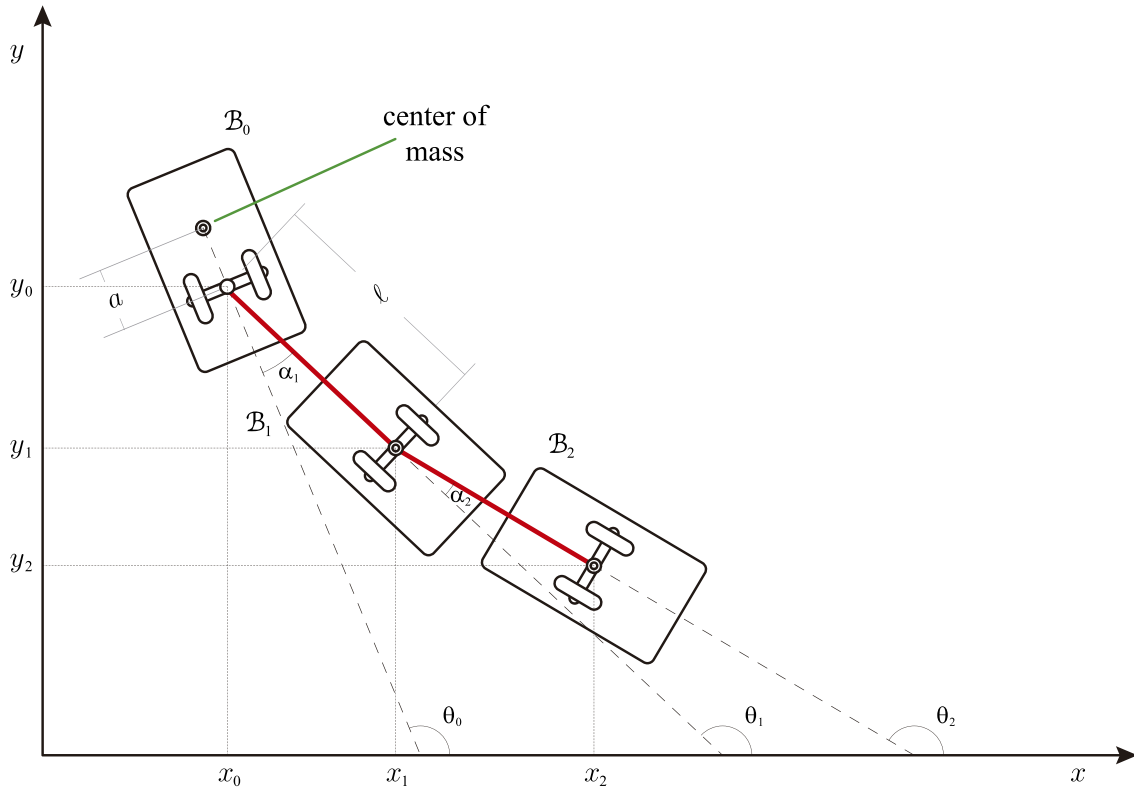
$$\dot{x}_i \sin \theta_i - \dot{y}_i \cos \theta_i = 0, \quad i = 0, 1, \dots, n. \quad (2.2)$$

Gracias a las ecuaciones holónomas 2.1, la configuración del convoy queda determinado por los valores de las coordenadas

$$x_0, y_0, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n.$$

---

<sup>1</sup> Aunque es verdad que un coche real su velocidades no posibles son mas que la dirección perpendicular al eje, este modelo puede ser una buena aproximación

Figura 2.1: El convoy de  $n$ -trailer con  $n = 2$ .

Por lo tanto el espacio de configuraciones del sistema es una variedad de dimensión  $(n + 3)$  dada por  $Q = SE(2) \times \mathbb{T}^n$  donde  $SE(2)$  es el grupo Euclidiano que actúa en  $\mathbb{R}^2$  y  $\mathbb{T}^n$  el toro  $n$ -dimensional. Las restricciones no holónomas 2.2 definen una distribución de constricción  $\mathcal{D}$  en  $Q$  de rango 2.

## 2.2. Dinámica

Pensaremos que el centro de masa del carro  $\mathcal{B}_0$  está desplazado en dirección del eje del mismo carro una distancia  $a$  hacia adelante del punto  $(x_0, y_0)$  (ver figura 2.1). Por lo tanto si,  $(x_c, y_c)$  denotan las coordenadas del centro de masa de  $\mathcal{B}_0$ , tenemos que

$$(x_c, y_c) = (x_0, y_0) + a(\cos \theta_0, \sin \theta_0). \quad (2.3)$$

Denotaremos la masa de  $\mathcal{B}_0$  por  $M$  y  $J_0$  al momento de inercia respecto al centro de masa. Por otro lado suponemos que los trailers  $\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2, \dots, \mathcal{B}_n$  son idénticos y que el centro de masa respectivo a cada trailer está en el punto medio su eje, es decir en  $(x_i, y_i)$ . La masa de cada carro es  $m$  y el momento de inercia respecto al punto  $(x_i, y_i)$  es  $J$ .



La energía cinética del sistema esta dada por

$$K = \frac{1}{2}[J_0\dot{\theta}_0^2 + M(\dot{x}_c^2 + \dot{y}_c^2) + J \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2 + m \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)].$$

Usando la ecuación (2.3), tenemos que

$$K = \frac{1}{2}[(J_0 + Ma^2)\dot{\theta}_0^2 + M(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + 2aM\dot{\theta}_0(\dot{y}_0 \cos \theta_0 - \dot{x}_0 \sin \theta_0) + J \sum_{i=1}^n \dot{\theta}_i^2 + m \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2)].$$

Usaremos las ecuaciones (2.1) para eliminar las variables  $(x_i, y_i)$ . Así obtenemos la Lagrangiana del sistema  $\mathcal{L} : TQ \rightarrow \mathbb{R}$  en términos de las coordenadas  $(x_0, y_0, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n+1})$ , gracias a que

$$x_i = x_0 - \ell \sum_{j=1}^i \cos \theta_j, \quad y_i = y_0 - \ell \sum_{j=1}^i \sin \theta_j, \quad i = 1, \dots, n. \quad (2.4)$$

derivando estas expresiones tenemos

$$\dot{x}_i = \dot{x}_0 + \ell \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \cos \theta_j, \quad \dot{y}_i = \dot{y}_0 - \ell \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \sin \theta_j, \quad i = 1, \dots, n.$$

Y por lo tanto

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) &= \sum_{i=1}^n \left( (\dot{x}_0 + \ell \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \cos \theta_j)^2 + (\dot{y}_0 - \ell \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \sin \theta_j)^2 \right) \\ &= \sum_{i=1}^n [(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + 2\ell \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j (\dot{x}_0 \cos \theta_j - \dot{y}_0 \sin \theta_j) + \ell^2 \left( \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \sin \theta_j \right)^2 + \ell^2 \left( \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \cos \theta_j \right)^2]. \end{aligned}$$

Desarrollando los dos primeros términos

$$\sum_{i=1}^n [(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + 2\ell \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j (\dot{x}_0 \cos \theta_j - \dot{y}_0 \sin \theta_j)] = n(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + \sum_{j=1}^n (n+1-j) \dot{\theta}_j (\dot{x}_0 \cos \theta_j - \dot{y}_0 \sin \theta_j), \quad (2.5)$$

dado que el término  $\dot{x}_0 \cos \theta_j - \dot{y}_0 \sin \theta_j$  está en los sumandos  $\sum_{k=1}^m \dot{\theta}_k (\dot{x}_0 \cos \theta_k - \dot{y}_0 \sin \theta_k)$  para  $m \in \{j, j+1, \dots, n\}$ . Es decir dicho término no está en los primeros  $j-1$  sumandos, por lo que aparece en  $n - (j-1) = (n+1-j)$  ocasiones. Calculemos los términos restantes.

$$\begin{aligned} \left( \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \sin \theta_j \right)^2 + \left( \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \cos \theta_j \right)^2 &= \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j^2 \cos^2 \theta_j + 2\ell^2 \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^i \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \cos \theta_k \cos \theta_j \\ &\quad + \sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j^2 \sin^2 \theta_j + 2\ell^2 \sum_{k=1}^{i-1} \sum_{j=k+1}^i \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \sin \theta_j \sin \theta_k, \end{aligned}$$

con el mismo argumento de arriba podemos sumar sobre las  $i$ , factorizar  $(n+1-j)$  a los términos que involucran a las  $\dot{\theta}_j^2$  y aplicar el teorema de Pitágoras para obtener

$$\left(\sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \sin \theta_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^i \dot{\theta}_j \cos \theta_j\right)^2 = \sum_{j=1}^n (n+1-j) \dot{\theta}_j^2 + 2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (n+1-j) \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \cos(\theta_k - \theta_j). \quad (2.6)$$

Usando (2.5) y (2.6) concluimos que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (\dot{x}_i^2 + \dot{y}_i^2) &= n(\dot{x}_0^2 + \dot{y}_0^2) + 2\ell \sum_{j=1}^n (n+1-j) \dot{\theta}_j (\dot{y}_0 \cos \theta_j - \dot{x}_0 \sin \theta_j) \\ &\quad + \ell^2 \sum_{j=1}^n (n+1-j) \dot{\theta}_j^2 + 2\ell^2 \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{j=k+1}^n (n+1-j) \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \cos(\theta_k - \theta_j). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la Lagrangiana del sistema  $\mathcal{L} : TQ \rightarrow R$  está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} \left( (J_0 + Ma^2) \dot{\theta}^2 + (M + nm)(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + 2Ma\dot{\theta}(\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta) \right. \\ &\quad \left. + 2m\ell \sum_{j=1}^n (n+1-j) \dot{\theta}_j (\dot{y} \cos \theta_j - \dot{x} \sin \theta_j) + \sum_{j=1}^n (J + (n+1-j)m\ell^2) \dot{\theta}_j^2 \right. \\ &\quad \left. + 2m\ell^2 \sum_{k=1}^n \sum_{j=k+1}^n (n+1-j) \dot{\theta}_k \dot{\theta}_j \cos(\theta_k - \theta_j) \right), \end{aligned} \quad (2.7)$$

A partir de ahora denotaremos a  $x_0 = x$ ,  $y_0 = y$  y  $\theta_0 = \theta$ .

Usando las ecuaciones (2.4) para reescribir las ecuaciones 2.2 en términos de las coordenadas  $(x_0, y_0, \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_{n+1})$  de  $Q$  llegamos a

$$\dot{x} \sin \theta_i - \dot{y} \cos \theta_i + \ell \sum_{j=1}^i \cos(\theta_i - \theta_j) \dot{\theta}_j = 0, \quad i = 0, \dots, n. \quad (2.8)$$

En principio podemos encontrar las ecuaciones de movimiento con las ecuaciones 2.7 y 2.8 usando el principio de D'Alembert y los multiplicadores de Lagrange, sin embargo este método es poco útil en términos computacionales dado que la elección de coordenadas tal vez no sea la óptima para plantear el problema, dado que no toma en cuenta las simetrías del sistema.

## 2.3. Simetrías

Consideremos la acción de la matriz

$$g = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & r \\ \sin \varphi & \cos \varphi & s \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & R \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in SE(2)$$

sobre la configuración  $(x, y, \theta, \theta_1, \dots, \theta_n) \in Q$  definida por

$$\begin{aligned} g \cdot (x, y, \theta, \theta_1, \dots, \theta_n) &= (x \cos \varphi - y \sin \varphi + r, x \sin \varphi + y \cos \varphi + s, \theta + \varphi, \theta_1 + \varphi, \dots, \theta_n + \varphi). \\ &= \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \theta + \varphi, \theta_1 + \varphi, \dots, \theta_n + \varphi \right) \end{aligned}$$

**Lema 2.3.1.** *La función Lagrangiana dada por (2.7) y las ecuaciones holónomas dadas por 2.8 son invariantes bajo la acción del grupo  $SE(2)$*

*Demostración.* La acción de  $SE(2)$  sobre  $Q$  pasa a  $TQ$  a través del levantamiento tangente

$$g \cdot (x, y, \theta, \theta_1, \dots, \theta_n, \dot{x}, \dot{y}, \dot{\theta}, \dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n) = \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \theta + \varphi, \dots, \theta_n + \varphi, A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix}, \dot{\theta}, \dots, \dot{\theta}_n \right).$$

Analicemos cada uno de los términos (2.7). Los que involucran a  $\dot{\theta}, \dot{\theta}_1, \dots, \dot{\theta}_n$  quedan iguales. Para el resto, gracias a que  $A$  es una matriz de rotación, se cumple

$$\left( A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} \right)^t A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = (\dot{x}, \dot{y}) A^t A \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \dot{x}^2 + \dot{y}^2.$$

Desarrollemos ahora el término  $\dot{y} \cos \theta_j - \dot{x} \sin \theta_j$ :

$$\begin{aligned} &(\dot{x} \sin \varphi + \dot{y} \cos \varphi) \cos(\theta_j + \varphi) - (\dot{x} \cos \varphi - \dot{y} \sin \varphi) \sin(\theta_j + \varphi) \\ &= \dot{y}(\sin \varphi \sin(\theta_j + \varphi) - \cos \varphi \cos(\theta_j + \varphi)) + \dot{x}(\sin \varphi \cos(\theta_j + \varphi) - \cos \varphi \sin(\theta_j + \varphi)) \\ &= \dot{y} \cos(\theta_j + \varphi - \varphi) - \dot{x} \sin(\theta_j + \varphi - \varphi) = \dot{y} \cos(\theta_j) - \dot{x} \sin(\theta_j). \end{aligned}$$

Por último el término  $\cos(\theta_k - \theta_j) = \cos(\theta_k + \varphi - (\theta_j + \varphi)) = \cos(\theta_k - \theta_j)$ . La función Lagrangiana (2.7) y las ecuaciones (2.8) son invariantes bajo la acción dado que los términos anteriores lo son.  $\square$

Este resultado nos permite plantear ecuaciones de movimiento reducidas en el espacio de órbitas  $\mathcal{D}/SE(2)$  que es un fibrado vectorial de rango dos sobre el  $n$ -toro  $\mathbb{T}$ .

Denotaremos la diferencia entre los ángulos correspondientes a carros consecutivos del convoy como (ver la figura 2.1)

$$\alpha_1 = \theta - \theta_1, \quad \alpha_i = \theta_{i-1} - \theta_i, \quad i = 2, \dots, n. \quad (2.9)$$

Estos nuevos ángulos son invariantes bajo la acción de  $SE(2)$  y definen coordenadas sobre la base  $\mathbb{T}^n$  del espacio reducido  $\mathcal{D}/SE(2)$ .

Ahora denotaremos por  $u$  a la velocidad lineal de  $\mathcal{B}_0$  en la dirección de su eje y a su velocidad angular por  $\omega$ , las cuales podremos expresar como

$$u = \dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta, \quad \omega = \dot{\theta}.$$

Las variables  $u, \omega$  son coordenadas lineales sobre las fibras del espacio cociente  $\mathcal{D}/SE(2)$ . Las ecuaciones reducidas forman un conjunto de  $n + 2$  ecuaciones diferenciales no-lineales de primer orden y acopladas para  $u, \omega, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ .

# Capítulo 3

## Ecuaciones de movimiento

Las coordenadas  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son las coordenadas naturales para el sistema, dado que para el sistema ( es decir la función lagrangiana 2.7 y las ecuaciones no holónomas 2.1 son las que determinan la dinámica) los valores de  $\theta, \theta_1, \dots, \theta_n$  son irrelevantes, los que determinan la dinámica son la diferencia entre dos ángulos consecutivos, esto se refleja en la simetría antes discutida. Las coordenadas  $u$  y  $\omega$  contienen toda la información de la dinámica del carro  $\mathcal{B}_0$  generada por la restricción sobre la velocidad del mismo carro. Lo que a continuación se presenta es la deducción de las ecuaciones en las nuevas coordenadas, con las que es mas facil obtener información sobre la física del problema.

### 3.1. Deducción de las ecuaciones de movimiento

Aquí desarrollaremos la idea de restringir la lagrangiana del sistema a la distribución  $\mathcal{D}$ . Los cálculos más difíciles de este trabajo involucran la demostración del siguiente teorema por lo que decidimos separar la parte teórica. El lector que no esté interesado en los aspectos técnicos puede seguir la lectura tomando como verdades las ecuaciones de movimiento planteadas.

**Teorema 3.1.1.** *Las ecuaciones de movimiento reducidas del vehículo articulado de  $n$ -trailers en las coordenadas  $u, \omega, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  están dadas por*

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -\frac{1}{2R(\alpha)} \left( \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \right) u^2 + \frac{Q(\alpha)}{\ell^2 R(\alpha)} u\omega + \frac{Ma}{R(\alpha)} \omega^2, \\ \dot{\omega} &= -\frac{Ma u \omega}{J_0 + Ma^2}, \\ \dot{\alpha}_1 &= \omega - \frac{u \sin \alpha_1}{\ell}, \\ \dot{\alpha}_k &= \frac{u}{\ell} \left( \prod_{j=1}^{k-2} \cos \alpha_j \right) (\sin \alpha_{k-1} - \cos \alpha_{k-1} \sin \alpha_k), \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned} \tag{3.1}$$

donde los coeficientes  $A_k$  seran calculados más adelante 3.6 y

$$\begin{aligned} Q(\alpha) &:= \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \left( m\ell^2 \sum_{j=1}^n \left( \prod_{k=2}^j \cos^2 \alpha_k \right) - J \prod_{k=2}^n \cos^2 \alpha_k \right), \\ R(\alpha) &:= M + m \left( \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \cos^2 \alpha_k \right) + \frac{J}{\ell^2} \left( 1 - \prod_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k \right), \end{aligned} \quad (3.2)$$

donde denotamos a  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ .<sup>1</sup>

De acuerdo a las ecuaciones (2.9) tenemos que

$$\theta - \sum_{j=1}^i \alpha_j = \theta - (\theta_1 - \theta + \theta_1 - \theta_1 + \dots + \theta_i - \theta_{i-1}) = \theta_i \quad i = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Usando esta ultima expresión podemos rescribir las restricciones no-holónomas 2.8 como sigue

$$\dot{x} \sin \theta - \dot{y} \cos \theta = 0,$$

$$\dot{x} \sin \left( \theta - \sum_{j=1}^i \alpha_j \right) - \dot{y} \cos \left( \theta - \sum_{j=1}^i \alpha_j \right) + \ell \sum_{j=1}^i \cos \left( \sum_{k=j+1}^i \alpha_k \right) \left( \dot{\theta} - \sum_{l=1}^j \dot{\alpha}_l \right) = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

Estas definen las formas diferenciales  $\beta_i$  dados por

$$\beta_i = \sin \left( \theta - \sum_{j=1}^i \alpha_j \right) dx - \cos \left( \theta - \sum_{j=1}^i \alpha_j \right) dy + \ell \sum_{j=1}^i \cos \left( \sum_{k=j+1}^i \alpha_k \right) \left( d\theta - \sum_{l=1}^j d\alpha_l \right)$$

y

$$\beta_0 = \sin \theta dx - \cos \theta dy$$

Consideremos los campos vectoriales sobre  $Q$  definidos en las coordenadas  $(x, y, \theta, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$  por

$$Z_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} + \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1}, \quad (3.4)$$

Es claro que  $\beta_i(Z_2) = 0$  para  $i = 0, 1, \dots, n$  y  $\beta_0(Z_1) = 0$ ; busquemos qué valor tiene que tener  $A_1$  para que  $\beta_1(Z_1) = 0$

$$\beta_1(Z_1) = \sin(\theta - \alpha_1) \cos \theta - \cos(\theta - \alpha_1) \sin \theta - \ell(A_1) = -\sin(\alpha_1) - \ell(A_1) = 0.$$

Por lo tanto  $A_1 = \frac{-1}{\ell} \sin(\alpha_1)$ . Repitiendo la misma idea para determinar  $A_2$  tenemos que  $\beta_2$  se ve como

$$\beta_2 = \sin(\theta - \alpha_1 - \alpha_2) dx - \cos(\theta - \alpha_1 - \alpha_2) dy + \ell(\cos(\alpha_2)(d\theta - d\alpha_1) + (d\theta - d\alpha_1 - d\alpha_2)).$$

<sup>1</sup>Nótese que  $R(\alpha) > 0$  para cualquier  $\alpha$ .

Aplicando identidades trigonométricas de forma análoga al caso anterior

$$\beta_2(Z_1) = -\sin(\alpha_1 + \alpha_2) + \ell(-\cos(\alpha_2) \frac{1}{\ell} \sin(\alpha_1) - \frac{1}{\ell} \sin(\alpha_1) - A_2) = 0.$$

despejando  $A_2$  llegamos a que

$$A_2 = \frac{1}{\ell}(\sin(\alpha_1) - \cos(\alpha_1) \sin(\alpha_2))$$

Para encontrar la fórmula general de las  $A_k$  repetimos el procedimiento una última vez, tenemos que

$$\begin{aligned} \beta_3 = & \sin(\theta - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) dx - \cos(\theta - \alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3) dy \\ & + \ell(\cos(\alpha_2 + \alpha_3) (d\theta - d\alpha_1) + \cos(\alpha_3) (d\theta - d\alpha_1 - d\alpha_2) + (d\theta - d\alpha_1 - d\alpha_2 - d\alpha_3)). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Evaluando en  $Z_1$  tenemos

$$0 = \beta_3(Z_1) = -\sin(\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) + \ell(-\cos(\alpha_2 + \alpha_3) A_1 - \cos(\alpha_3) (A_1 + A_2) - A_1 - A_2 - A_3).$$

Procediendo de forma análoga el lector podrá verificar que

$$A_3 = \frac{1}{\ell} \cos \alpha_1 (\sin \alpha_2 - \cos \alpha_2 \sin \alpha_3).$$

El coeficiente  $A_4$  se puede calcular de manera similar y obtenemos calcular  $A_4$ , para autoconvencerse que la siguiente fórmula es válida

$$A_k = \frac{1}{\ell} \left( \prod_{j=1}^{k-2} \cos \alpha_j \right) (\sin \alpha_{k-1} - \cos \alpha_{k-1} \sin \alpha_k), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.6)$$

Usaremos como caso base los cálculos para  $A_3$  y demostraremos por inducción la fórmula general, es decir supondremos que la fórmula es válida para  $A_{n-1}$  y que si

$$Z_1 = \sum_{j=1}^n \frac{\partial}{\partial \alpha_j},$$

done se cumple que  $\beta_n(Z_n) = 0$  entonces la fórmula (3.6) es válida. Para esto enunciamos el siguiente lema.

**Lema 3.1.2.** *Para cualesquiera  $\alpha_j$  números reales se cumple*

$$\sin \left( \sum_{j=1}^i \alpha_j \right) = \sum_{j=1}^i \cos \left( \sum_{k=j+1}^i \alpha_k \right) \left( \prod_{s=1}^{j-1} \cos \alpha_s \right) \sin \alpha_j, \quad (3.7)$$

$$\sum_{l=1}^j \left( \prod_{s=1}^{l-2} \cos \alpha_s \right) (\sin \alpha_{l-1} - \cos \alpha_{l-1} \sin \alpha_l) = - \left( \prod_{s=1}^{j-1} \cos \alpha_s \right) \sin \alpha_j, \quad (3.8)$$

Usando la definición de  $\beta_i$  y  $Z_1$  tenemos

$$0 = \beta_n(Z_1) = -\sin\left(\sum_{j=1}^n \alpha_j\right) - \ell \sum_{j=1}^{n-1} \cos\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha_k\right) \left(\sum_{l=1}^j A_l\right) - \ell \sum_{l=1}^n A_l. \quad (3.9)$$

Utilizando la definición de las  $A_k$ , junto con las relaciones 3.7 y 3.8

$$\begin{aligned} 0 = & -\sum_{j=1}^n \cos\left(\sum_{k=j+1}^n \alpha_k\right) \left(\prod_{s=1}^{j-1} \cos \alpha_s\right) \sin \alpha_j + \sum_{j=1}^{n-1} \cos\left(\sum_{k=j+1}^{n-1} \alpha_k\right) \left(\prod_{s=1}^{j-1} \cos \alpha_s\right) \sin \alpha_j \\ & + \left(\prod_{s=1}^{j-2} \cos \alpha_s\right) \sin \alpha_j - A_n \end{aligned} \quad (3.10)$$

Despejando  $A_n$  obtenemos la relación deseada.

Los campos vectoriales  $Z_1$  y  $Z_2$  son linealmente independientes, por lo que forman una base de  $\mathcal{D}$ . Por lo tanto, cualquier vector  $v \in TQ$  que pertenece a  $\mathcal{D}$  lo podemos escribir como una combinación lineal

$$v = uZ_1 + \omega Z_2, \quad u, \omega \in \mathbb{R}, \quad (3.11)$$

lo cual define las ecuaciones

$$\begin{aligned} \dot{x} &= u \cos \theta, \\ \dot{y} &= u \sin \theta, \\ \dot{\theta} &= \omega, \\ \dot{\alpha}_1 &= \omega - \frac{u \sin \alpha_1}{\ell}, \\ \dot{\alpha}_k &= \frac{u}{\ell} \left(\prod_{j=1}^{k-2} \cos \alpha_j\right) (\sin \alpha_{k-1} - \cos \alpha_{k-1} \sin \alpha_k), \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.12)$$

La ecuación (3.11) muestra que  $u$  y  $\omega$  son coordenadas lineales de la fibra de  $\mathcal{D}$ .

**Lema 3.1.3.** *Los campos  $Z_1$  y  $Z_2$  son invariantes bajo la acción de  $SE(2)$  definida en la sección anterior.*

*Demostración.* La acción de  $SE(2)$  en  $Q$  con las coordenadas  $x, y, \theta, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  está dada por

$$g \cdot (x, y, \theta, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \left( A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \\ s \end{pmatrix}, \theta + \varphi, \alpha_1, \dots, \alpha_n \right) = (\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{\theta}, \tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_n).$$

La acción pasa a  $TQ$  a través del levantamiento tangente. Los coeficientes  $A_i$  al sólo depender de  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  son invariantes ante la acción de  $SE(2)$ , por lo tanto

$$g \cdot Z_1 = \cos(\theta + \varphi) \frac{\partial}{\partial \tilde{x}} + \sin(\theta + \varphi) \frac{\partial}{\partial \tilde{y}} + \sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial}{\partial \tilde{\alpha}_i}$$

$$\begin{aligned}
&= \cos(\theta + \varphi) \left( \cos \varphi \frac{\partial}{\partial x} - \sin \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) + \sin(\theta + \varphi) \left( \sin \varphi \frac{\partial}{\partial x} + \cos \varphi \frac{\partial}{\partial y} \right) + \sum_{i=1}^n A_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} \\
&= (\cos(\theta + \varphi) \cos \varphi + \sin(\theta + \varphi) \sin \varphi) \frac{\partial}{\partial x} + (\cos \varphi \sin(\theta + \varphi) - \sin \varphi \cos(\theta + \varphi)) \frac{\partial}{\partial y} \\
&\quad + \sum_{i=1}^n A_k \frac{\partial}{\partial \alpha_k} = Z_1
\end{aligned}$$

De la misma forma para  $Z_2$ . □

Esto nos dice que los campos  $Z_1$  y  $Z_2$  son una base de la sección reducida del fibrado vectorial  $\mathcal{D}/SE(2)$ . Se sigue que  $u$  y  $\omega$  se pueden interpretar como coordenadas lineales sobre el haz tangente de  $\mathcal{D}/SE(2)$ , como ya habíamos mencionado.

Las ecuaciones 3.12 son puramente cinéticas y son conocidas por la comunidad de teoría de control. Las ecuaciones para las variables  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  se pueden interpretar en el espacio reducido, y son consistentes con el enunciado del Teorema 3.1.

La ecuación para la evolución de  $\omega$  es fácil de obtener a través de las ecuaciones de Euler-Lagrange para sistemas no holónomos usando los multiplicadores de Lagrange. Gracias a que las restricciones no involucran  $\dot{\theta}$ , entonces al escribir las fuerzas de reacción en las coordenadas  $(x, y, \theta, \theta_1, \dots, \theta_n)$  no tienen componente en la dirección  $\theta$ , por lo tanto

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0,$$

donde  $\mathcal{L}$  está dada por 2.7. Calculando llegamos a que

$$(J_0 + Ma^2)\ddot{\theta} + Ma \frac{d}{dt} (\dot{y} \cos \theta - \dot{x} \sin \theta) = -Ma\dot{\theta}(\dot{x} \cos \theta + \dot{y} \sin \theta).$$

Usando (3.12) obtenemos

$$\dot{\omega} = -\frac{Ma u \omega}{J_0 + Ma^2} \quad (3.13)$$

que es el resultado buscado en 3.1.

Ahora que ya tenemos coordenadas para la distribución, calculamos la Lagrangiana restringida  $\mathcal{L}_c := \mathcal{L}|_{\mathcal{D}}$ . Esto es la energía cinética del sistema donde se satisfacen las condiciones no holónomas, gracias a las simetrías antes discutidas podemos expresar a  $\mathcal{L}_c$  en términos de  $u, \omega, \alpha_1, \dots, \alpha_n$ , para esto utilizaremos (3.3), (3.8) y (3.12) para ver que

$$\dot{x} = u \cos \theta, \quad \dot{y} = u \sin \theta, \quad \dot{\theta} = \omega, \quad \dot{\theta}_k = \frac{u \sin \alpha_k}{\ell} \prod_{j=1}^{k-1} \cos \alpha_j, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.14)$$

**Lema 3.1.4.** *Dada  $j \geq 1$ . Si las ecuaciones (3.14) son satisfechas, entonces*

$$\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 = u^2 \prod_{k=1}^j \cos^2 \alpha_k. \quad (3.15)$$



*Demostración.* Probaremos por inducción: Caso  $j = 1$

$$\begin{aligned}\dot{x}_1^2 + \dot{y}_1^2 &= (u \cos \theta + \ell \sin \theta_1 \dot{\theta}_1)^2 + (u \sin \theta - \ell \cos \theta_1 \dot{\theta}_1)^2 = u^2 + 2\ell \dot{\theta}_1 u (\cos \theta \sin \theta_1 - \sin \theta \cos \theta_1) + \ell^2 \dot{\theta}_1^2 \\ &= u^2 + 2\ell \dot{\theta}_1 u \sin(\theta_1 - \theta) + \ell^2 \dot{\theta}_1^2.\end{aligned}$$

Usando (3.14), la expresión anterior es igual a

$$u^2 - 2\ell \left( \frac{u \sin \alpha_1}{\ell} \right) u \sin \alpha_1 + \ell^2 \left( \frac{u \sin \alpha_k}{\ell} \right)^2 = u^2 (1 - \sin^2 \alpha_1) = u^2 \cos^2 \alpha_1$$

Asumamos que la ecuación 3.15 es válido para  $j - 1$ . Gracias a

$$\dot{x}_j = \dot{x}_{j-1} + \ell \dot{\theta}_j \sin \theta_j, \quad \dot{y}_j = \dot{y}_{j-1} - \ell \dot{\theta}_j \cos \theta_j.$$

tenemos que

$$\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 = \dot{x}_{j-1}^2 + \dot{y}_{j-1}^2 + 2\ell \dot{\theta}_j (\dot{x}_{j-1} \sin \theta_j - \dot{y}_{j-1} \cos \theta_j) + \ell^2 \dot{\theta}_j^2. \quad (3.16)$$

Recordando que

$$\dot{x}_{j-1} = \dot{x} + \ell \sum_{k=1}^{j-1} \sin \theta_k \dot{\theta}_k, \quad \dot{y}_{j-1} = \dot{y} - \ell \sum_{k=1}^{j-1} \cos \theta_k \dot{\theta}_k,$$

llegamos a

$$\begin{aligned}\dot{x}_{j-1} \sin \theta_j - \dot{y}_{j-1} \cos \theta_j &= \dot{x} \sin \theta_j - \dot{y} \cos \theta_j + \ell \dot{\theta}_k (\sin \theta_j \sum_{k=1}^{j-1} \sin \theta_k - \cos \theta_j \sum_{k=1}^{j-1} \cos \theta_k) \\ &= \dot{x} \sin \theta_j - \dot{y} \cos \theta_j + \ell \sum_{k=1}^{j-1} \cos(\theta_j - \theta_k) \dot{\theta}_k.\end{aligned}$$

Ahora usando (3.14) y (3.3) podemos escribir

$$\dot{x} \sin \theta_j - \dot{y} \cos \theta_j = u \left( \cos \theta \sin \left( \theta - \sum_{k=1}^j \alpha_k \right) - \sin \theta \cos \left( \theta - \sum_{k=1}^j \alpha_k \right) \right) = -u \sin \left( \sum_{k=1}^j \alpha_k \right).$$

De forma análoga podemos manipular la expresión

$$\begin{aligned}\ell \sum_{k=1}^{j-1} \cos(\theta_j - \theta_k) \dot{\theta}_k &= \ell \sum_{k=1}^{j-1} \cos \left( \theta - \sum_{i=1}^j \alpha_i - \left( \theta - \sum_{l=1}^k \alpha_l \right) \right) \frac{u \sin \alpha_k}{\ell} \prod_{s=1}^{k-1} \cos \alpha_s \\ &= \ell \sum_{k=1}^{j-1} \cos \left( - \sum_{l=k+1}^j \alpha_l \right) \frac{u \sin \alpha_k}{\ell} \prod_{s=1}^{k-1} \cos \alpha_s \\ &= -\ell \dot{\theta}_j + u \sum_{k=1}^j \cos \left( \sum_{l=k+1}^j \alpha_l \right) \sin \alpha_k \left( \prod_{s=1}^{k-1} \cos \alpha_s \right).\end{aligned}$$

A causa de (3.7) podemos ver que

$$\dot{x}_{j-1} \sin \theta_j - \dot{y}_{j-1} \cos \theta_j = -u \sin \left( \sum_{k=1}^j \alpha_k \right) - \ell \dot{\theta}_j + u \sum_{k=1}^j \cos \left( \sum_{l=k+1}^j \alpha_l \right) \sin \alpha_k \left( \prod_{s=1}^{k-1} \cos \alpha_s \right) = -\ell \dot{\theta}_j.$$

Por lo tanto, usando (3.16) tenemos

$$\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 = \dot{x}_{j-1}^2 + \dot{y}_{j-1}^2 - \ell^2 \dot{\theta}_j^2.$$

Gracias a la hipótesis de inducción y (3.14) una vez más, llegamos a

$$\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2 = u^2 \prod_{k=1}^{j-1} \cos^2 \alpha_k - u^2 \sin^2 \alpha_j \prod_{k=1}^{j-1} \cos^2 \alpha_k = u^2 \prod_{k=1}^j \cos^2 \alpha_k.$$

□

Si las restricciones no-holónomas (3.14) se satisfacen, la energía cinética del  $j$ -ésimo carro es:

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_j &= \frac{1}{2} \left( J \dot{\theta}_j^2 + m(\dot{x}_j^2 + \dot{y}_j^2) \right) \\ &= \frac{u^2}{2} \left( \prod_{k=1}^{j-1} \cos^2 \alpha_k \right) \left( \frac{J}{\ell^2} \sin^2 \alpha_j + m \cos^2 \alpha_j \right), \quad j = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Para  $j = 0$  tenemos

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_0 &= \frac{1}{2} \left( J_0 \dot{\theta}^2 + m(\dot{x}_C^2 + \dot{y}_C^2) \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( (J_0 + Ma^2) \omega^2 + Mu^2 \right). \end{aligned}$$

Sumando la contribución de energía de cada carro, obtenemos que la energía total del sistema es

$$\mathcal{L}_c = \frac{1}{2} \left( R(\alpha) u^2 + (J_0 + Ma^2) \omega^2 \right). \quad (3.17)$$

Ahora probaremos el siguiente resultado.

**Lema 3.1.5.** *La proyección ortogonal de  $[Z_1, Z_2]$  sobre  $\mathcal{D}$  con respecto a la métrica riemanniana que induce la energía cinética (2.7) está dada por*

$$\mathcal{C}_{12}^1 Z_1 + \mathcal{C}_{12}^2 Z_2,$$

donde

$$\mathcal{C}_{12}^1 = \frac{Q(\alpha)}{\ell^2 R(\alpha)}, \quad \mathcal{C}_{12}^2 = -\frac{Ma}{J_0 + Ma^2}.$$

Aquí  $Q(\alpha)$  y  $R(\alpha)$  están definidas por (3.2).

*Demostración.* Usaremos la fórmula (1.34) con subíndice  $b = 2$  (donde  $v^1 = u$ ,  $v^2 = \omega$ ). Donde  $\mathcal{L}_c$  es independiente de  $x, y, \theta$ , y el campo vectorial  $Z_2$  está dado por (3.4), llegamos a

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \omega} \right) = \mathfrak{C}_{12}^1 u \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial u} + \mathfrak{C}_{12}^2 u \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \omega} + \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \alpha_1},$$

con la propiedad de que  $\mathfrak{C}_{12}^e = -\mathfrak{C}_{21}^e$ ,  $e = 1, 2$ .

Recordemos la expresión (3.17) para  $\mathcal{L}_c$ , con esto la ecuación anterior queda como

$$(J_0 + Ma^2)\dot{\omega} = \mathfrak{C}_{12}^1 R(\alpha)u^2 + \mathfrak{C}_{12}^2 (J_0 + Ma^2)u\omega + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}(\alpha)u^2.$$

Comparando con la ecuación (3.13) concluimos que

$$\mathfrak{C}_{12}^1 R(\alpha) + \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}(\alpha) = 0, \quad \mathfrak{C}_{12}^2 = -\frac{Ma}{J_0 + Ma^2}.$$

La prueba termina con un último cálculo

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial \alpha_1}(\alpha) &= \frac{\partial}{\partial \alpha_1} \left( M + m \left( \sum_{j=1}^n \prod_{k=1}^j \cos^2 \alpha_k \right) + \frac{J}{\ell^2} \left( 1 - \prod_{k=1}^n \cos^2 \alpha_k \right) \right) \\ &= 2 \cos \alpha_1 \sin \alpha_1 \left( m \sum_{j=1}^n \prod_{k=2}^j \cos^2 \alpha_k - \frac{J}{\ell^2} \prod_{k=2}^n \cos^2 \alpha_k \right) = -\frac{2Q(\alpha)}{\ell^2}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

□

La ecuación de evolución para  $u$  la podemos obtener ahora a partir de la fórmula general (1.34) con el subíndice  $b = 1$ . Dado que  $\mathcal{L}_c$  es independiente  $x, y, \theta$ , y el campo vectorial  $Z_1$  está dado por (3.4), concluimos

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial u} \right) = -\mathfrak{C}_{12}^1 \omega \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial u} - \mathfrak{C}_{12}^2 \omega \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \omega} + \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial \mathcal{L}_c}{\partial \alpha_k},$$

Usando 3.17 tenemos

$$\frac{d}{dt} (R(\alpha)u) = -\frac{Q(\alpha)}{\ell^2} u\omega + Ma\omega^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} u^2. \quad (3.19)$$

Por otro lado

$$\frac{d}{dt} (R(\alpha)u) = u \sum_{k=1}^n \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \dot{\alpha}_k + R(\alpha)\dot{u}. \quad (3.20)$$

donde

$$\dot{\alpha}_1 = \omega + uA_1, \quad \dot{\alpha}_k = uA_k, \quad k = 2, \dots, n, \quad (3.21)$$

Usando (3.19) y (3.20) obtenemos

$$R(\alpha)\dot{u} = -\frac{1}{2} \left( \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \right) u^2 - \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} u\omega - \frac{Q(\alpha)u\omega}{\ell^2} + Ma\omega^2. \quad (3.22)$$

Finalmente, sustituyendo (3.18) en la ecuación (3.22) llegamos a

$$\dot{u} = -\frac{1}{2R(\alpha)} \left( \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \right) u^2 + \frac{Q(\alpha)}{\ell^2 R(\alpha)} u\omega + \frac{Ma}{R(\alpha)} \omega^2, \quad (3.23)$$

con lo que concluimos la validez de 3.1.

### 3.1.1. Conservación de la energía y el flujo sobre subvariedades de energía constante.

De la misma forma que en un sistema hamiltoniano independiente del tiempo la función de hamilton se conserva, en nuestro caso también se cumple que la energía cinética (3.17) se conserva a lo largo del flujo. Si llamamos

$$\mathcal{E}(\alpha, u, \omega) = \frac{1}{2} (R(\alpha)u^2 + (J_0 + Ma^2)\omega^2), \quad (3.24)$$

con un cálculo directo usando (3.21) y (3.18) tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathcal{E}(\alpha, u, \omega) &= \frac{1}{2} \left( u^2 \sum_{i=1}^n \frac{dR}{d\alpha_i} \dot{\alpha}_i + 2R(\alpha)u\dot{u} + 2(J_0 + Ma^2)\omega\dot{\omega} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( u^2 \sum_{i=1}^n \frac{dR}{d\alpha_i} \dot{\alpha}_i - \left( \sum_{k=1}^n A_k \frac{\partial R}{\partial \alpha_k} \right) u^3 + \frac{2Q(\alpha)u^2\omega}{\ell^2} + 2Ma u\omega^2 - 2Ma u\omega^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( u^2 \frac{dR}{d\alpha_1} (\omega + uA_1) - A_1 \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} u^3 + \sum_{i=2}^n (u^2 \frac{dR}{d\alpha_i} (uA_i) - A_i \frac{\partial R}{\partial \alpha_i} u^3) + \frac{2Q(\alpha)u^2\omega}{\ell^2} \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( u^2 \frac{dR}{d\alpha_1} \omega + \frac{2Q(\alpha)u^2\omega}{\ell^2} \right) = \frac{1}{2} \left( -\frac{2Q(\alpha)u^2\omega}{\ell^2} + \frac{2Q(\alpha)u^2\omega}{\ell^2} \right) = 0 \end{aligned}$$

Esto demuestra que  $\mathcal{E}$  es preservada por el flujo de (3.1).

Dado  $E > 0$ . Es natural parametrizar la subvariedad de energía constante  $\mathcal{E} = E$  con los ángulos  $\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n$  donde el ángulo  $\beta$  es único y queda determinado por las relaciones

$$u = \sqrt{\frac{2E}{R(\alpha)}} \cos \beta, \quad \omega = \sqrt{\frac{2E}{J_0 + Ma^2}} \sin \beta. \quad (3.25)$$

Con esto vemos que los niveles de energía  $\mathcal{E} = E$  son difeomorfos al  $(n+1)$ -toro que denotamos por  $\mathbb{T}^{n+1}$ . Para obtener una expresión para la evolución de  $\beta$ , derivamos  $\omega$  con respecto del tiempo.

$$\dot{\omega} = \sqrt{\frac{2E}{J_0 + Ma^2}} \dot{\beta} \cos \beta.$$

Ahora, combinando (3.13) con (3.25) obtenemos

$$\sqrt{\frac{2E}{J_0 + Ma^2}} \dot{\beta} \cos \beta = -\frac{Ma}{J_0 + Ma^2} \left( \frac{2E}{\sqrt{R(\alpha)}(J_0 + Ma^2)} \right) \cos \beta \sin \beta$$

simplificando,

$$\dot{\beta} = -\frac{Ma}{J_0 + Ma^2} \sqrt{\frac{2E}{R(\alpha)}} \sin \beta, \quad (3.26)$$

donde supondremos que  $\cos \beta \neq 0$ . Procediendo de forma análoga, derivamos la relación para  $u$  (3.25) con respecto del tiempo y usando (3.23) obtenemos (3.26) probando bajo el supuesto de que  $\sin \beta \neq 0$ . En conclusión, la ecuación (3.26) es válida para todo valor de  $\beta$ .

El resto de las ecuaciones del flujo restringido al nivel de energía  $\mathcal{E} = E$  son obtenidas usando (3.25) y (3.1). Obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_1 &= \sqrt{\frac{2E}{J_0 + Ma^2}} \sin \beta - \frac{\sqrt{2E} \sin \alpha_1}{\ell \sqrt{R(\alpha)}} \cos \beta, \\ \dot{\alpha}_k &= \frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2E}{R(\alpha)}} \left( \prod_{j=1}^{k-2} \cos \alpha_j \right) (\sin \alpha_{k-1} - \cos \alpha_{k-1} \sin \alpha_k) \cos \beta, \quad k = 2, \dots, n. \end{aligned} \quad (3.27)$$

Resumiendo los resultados de la subsección tenemos que: Los conjuntos de energía constante del sistema reducido (3.1) son difeomorfos a un  $(n+1)$ -toro el cual podemos parametrizar por las variables angulares  $(\beta, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$ . El flujo restringido en el toro  $\mathcal{E} = E > 0$  está descrito por las ecuaciones (3.26) y (3.27).

## 3.2. Clasificación y linealización de los puntos de equilibrio.

Ahora haremos un análisis cualitativo del sistema reducido (3.27) para los conjuntos de energía positiva. En esta sección supondremos que la constante  $a$  es positiva. El estudio del caso  $a$  negativa es análogo.

### 3.2.1. Clasificación de los puntos de equilibrio

**Proposición 3.2.1.** *Dada  $E > 0$  existen  $2^{n+1}$  puntos de equilibrio en el conjunto de energía  $\mathcal{E} = E$  para el sistema reducido (3.1). Éstos están dados por*

$$u = \pm \sqrt{\frac{2E}{M + nm}}, \quad \omega = 0, \quad \sin \alpha_k = 0, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.28)$$

*Demostración.* Usaremos las ecuaciones (3.26) y (3.27). Pidiendo que  $\dot{\beta} = 0$  en (3.26) implica que

$$\sin \beta = 0.$$

Gracias a esto, de la ecuación (3.27) podemos ver que si  $\dot{\alpha}_1 = 0$  entonces  $\sin \alpha_1 = 0$ . Ahora supondremos que  $\dot{\alpha}_k = 0$  y  $\sin \beta = \sin \alpha_1 = \dots = \sin \alpha_{k-1} = 0$ . De la ecuación (3.27) se sigue que  $\sin \alpha_k = 0$ . Esto muestra que los únicos puntos de equilibrio del sistema reducido son los puntos donde

$$\sin \beta = \sin \alpha_1 = \dots = \sin \alpha_n = 0. \quad (3.29)$$

Ahora puede usarse (3.2) para mostrar que el valor de  $R(\alpha)$  en estos puntos es igual a la masa total del sistema  $M + nm$ . La prueba termina usando las ecuaciones (3.25).  $\square$

Supondremos que el sistema está en una configuración de equilibrio con energía  $E$ . La condición  $\omega = 0$  implica que el carro  $\mathcal{B}_0$  se mueve en una línea recta, con velocidad constante  $\sqrt{\frac{2E}{M+nm}}$  lo cual se deduce de (3.28). El movimiento es hacia adelante (en la dirección del punto medio del eje al centro de masa) si  $u > 0$  y en reversa si  $u < 0$ .

Por otro lado, la condición  $\sin \alpha_k = 0$  en (3.28) implica que el  $k$ -ésimo trailer  $\mathcal{B}_k$  está alineado con el  $(k - 1)$ -ésimo trailer  $\mathcal{B}_{k-1}$ . Denotamos por

$$\sigma_k = \cos \alpha_k = \pm 1, \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.30)$$

Si  $\sigma_k = 1$ , tenemos que  $\mathcal{B}_k$  está atrás de  $\mathcal{B}_{k-1}$ . Por otro lado si  $\sigma_1 = -1$  entonces  $\mathcal{B}_1$  está adelante  $\mathcal{B}_0$  pensando que las llantas con tracción del carro están atrás. En general, si  $\sigma_{k+1} = -1$  entonces  $\mathcal{B}_{k+1}$  está sobre puesto con  $\mathcal{B}_{k-1}$ . Ver la figura 3.1. Esto nos recuerda el equilibrio de  $n$  péndulos planos acoplados donde también existe la posibilidad de que los péndulos se traslapen.

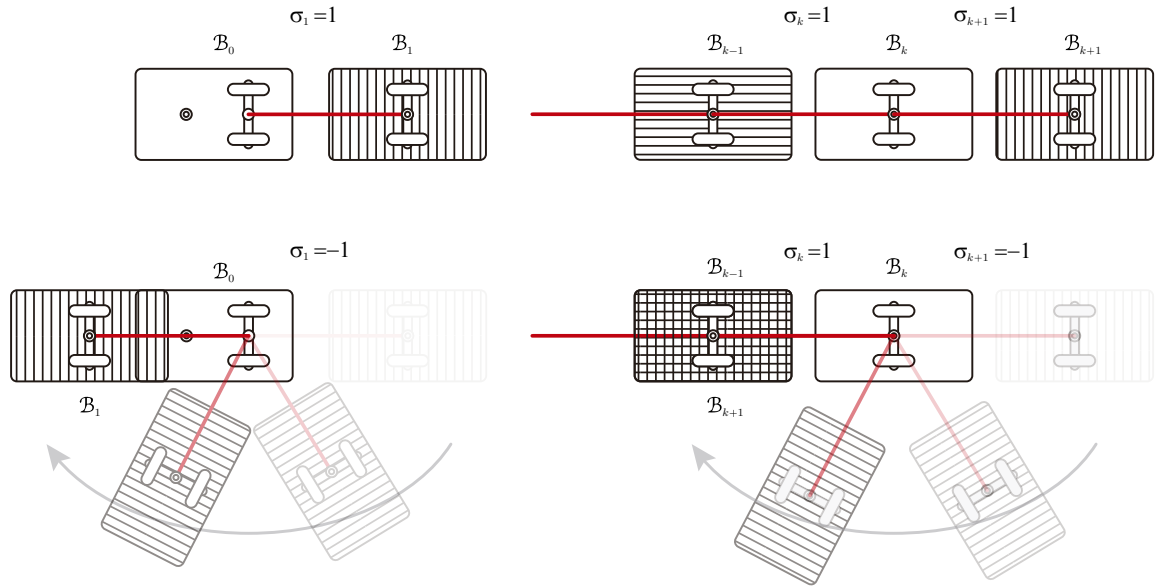


Figura 3.1: Ilustración de los puntos de equilibrio para los estados con  $\sigma_1 = \pm 1, \sigma_k = 1$  y  $\sigma_{k+1} = \pm 1$ .

Concluimos que los puntos de equilibrio del sistema reducido corresponden a las soluciones donde el convoy se mueve a velocidad constante con todos los trailers alineados, con la

posibilidad de que los carros estén sobrepuestos. El único punto de equilibrio físicamente posible ocurre cuando  $\sigma_1 = \dots = \sigma_n = 1$ , en otras palabras, cuando no hay carros encimados. Sólo existen dos soluciones de éstas, las cuales corresponden al movimiento del convoy hacia adelante o en reversa. Mostraremos que la primera opción es un punto de equilibrio estable mientras la segunda opción es inestable. Este resultado es de esperar por que desde hace varios siglos la humanidad sabe que al construir barcos o carros el centro de masa tiene que ir adelante del centro geométrico en la dirección del movimiento, como se puede observar en el trineo de Chaplygin (ver e.g. [13]).

### 3.2.2. Estabilidad de los puntos de equilibrio.

Hagamos un estudio cualitativo del sistema al linealizar las ecuaciones alrededor de los puntos de equilibrio clasificados en la sección anterior. Consideremos el sistema restringido al  $(n + 1)$ -toro de energía constante  $\mathcal{E} = E$ , trabajaremos con las ecuaciones (3.26) y (3.27). Para obtener la linealización de las ecuaciones alrededor de los puntos de equilibrio, usaremos las relaciones

$$R(\alpha) = M + nm \quad y \quad \frac{\partial R}{\partial \alpha_j}(\alpha) = 0, \quad j = 1, \dots, n,$$

donde  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$  satisface las condiciones de equilibrio (3.28).

Por (3.29) las ecuaciones (3.26) y (3.27) están satisfechas. Denotamos por

$$\sigma_0 = \cos \beta = \pm 1.$$

El movimiento del convoy hacia adelante corresponde a  $\sigma_0 = 1$  y el movimiento hacia atrás a  $\sigma_0 = -1$ .

Calculando la matriz de Jacobi de las ecuaciones (3.26), (3.27) y evaluadas en los puntos de equilibrio, obtenemos

$$\frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2E}{M + nm}} \begin{pmatrix} \frac{-Ma\ell}{J_0 + Ma^2} \sigma_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \ell \sqrt{\frac{M + nm}{J_0 + Ma^2}} \sigma_0 & -\sigma_1 \sigma_0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_1 \sigma_0 & -\sigma_2 \sigma_1 \sigma_0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_2 \sigma_1 \sigma_0 & -\sigma_3 \sigma_2 \sigma_1 \sigma_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \dots & & -\prod_{j=0}^n \sigma_j \end{pmatrix}.$$

Gracias a que la matriz es triangular inferior los eigenvalores son los elementos de la diagonal

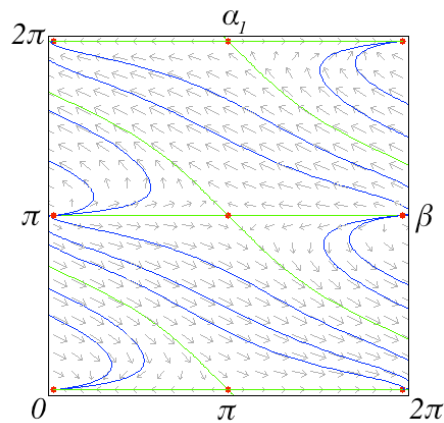
$$\lambda_0 = -\frac{Ma}{J_0 + Ma^2} \sqrt{\frac{2E}{M + nm}} \sigma_0, \quad \lambda_k = -\frac{1}{\ell} \sqrt{\frac{2E}{M + nm}} \prod_{j=0}^k \sigma_j, \quad k = 1, \dots, n.$$

Por lo tanto todos los puntos de equilibrio son hiperbólicos. Con esto podemos ver la naturaleza de los puntos de equilibrio.

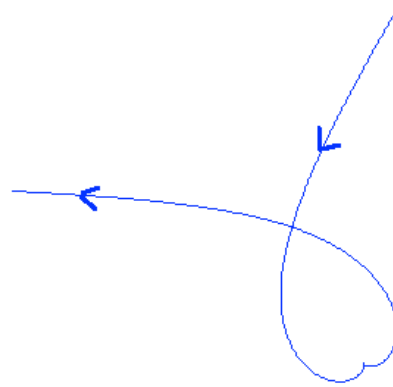
1. Si al menos un  $\sigma_k$  con  $k = 1, \dots, n$ , es negativo (hay trailers sobrepuestos) tenemos valores propios negativos o positivos, por lo tanto un punto silla.
2. Si  $\sigma_k = 1$  para toda  $k = 1, \dots, n$  (no hay ninguno sobrepuesto) y  $\sigma_0 > 0$  (el convoy se mueve hacia adelante) entonces todos los valores propios son negativos y el punto de equilibrio es un nodo estable.
3. si  $\sigma_k = 1$  para toda  $k = 1, \dots, n$  (no ninguno sobrepuesto) y  $\sigma_0 < 0$  (el convoy se mueve en reversa) entonces todos los valores propios son positivos y el punto de equilibrio es un nodo inestable.

A continuación mostramos la integración numérica de la dinámica para el caso  $n = 1$  en la figura 3.2.

Aquí los conjuntos de energía constante son un 2-toro. Se observa que para condiciones iniciales genéricas la dinámica se acerca al nodo estable cuando  $t \rightarrow \infty$  (de la misma manera cuando  $t \rightarrow -\infty$  se acerca al nodo inestable). La figura 3.2 también muestra las trayectorias del carro  $\mathcal{B}_0$  sobre el plano para condiciones iniciales genéricas. Se puede ver como se aproxima asintóticamente al movimiento en línea recta. La curva trazada por  $\mathcal{B}_0$  nos recuerda al camino que sigue un trineo de Chaplygin (ver e.g. [13]).



(a) Se muestra el retrato fase en una región fundamental del toro  $(\alpha_1, \beta)$ , donde hay 4 puntos de equilibrio (salvo equivalencia módulo  $2\pi$ ). El nodo estable está en  $(0, 0)$ , el nodo inestable está en  $(0, \pi)$  y los dos puntos sillas se encuentran en  $(\pi, 0)$  y  $(\pi, \pi)$ .



(b) La trayectoria de  $\mathcal{B}_0$  en el plano, donde vemos su comportamiento asintótico a una recta.

Figura 3.2: Retrato fase restringido al flujo en los niveles de energía del 2 toro y una trayectoria genérica del carro  $\mathcal{B}_0$  para el caso  $n = 1$ .

### 3.3. El caso $a = 0$

Si suponemos  $a = 0$  la dinámica cambia de forma particular, al sustituir  $a = 0$  en las ecuaciones (3.1) vemos que  $\omega$  es constante durante el movimiento. Cuando  $\omega = 0$ , la



clasificación de los puntos de equilibrio de la ecuación (3.1) coincide con la descripción dada en la proposición 3.2.1. Por lo anterior de aquí en adelante pensaremos que  $\omega \neq 0$ . La clasificación de los puntos de equilibrio está dada por la siguiente proposición.

**Proposición 3.3.1.** *Supongamos  $a = 0$  y  $\omega = \omega_0 \neq 0$ . Una condición necesaria y suficiente para la existencia de puntos de equilibrio de (3.1) con  $u = u_0$  es*

$$n\ell^2\omega_0^2 \leq u_0^2. \quad (3.31)$$

*Demostración.* La relación (3.21) nos dice que un punto de equilibrio cumple con que  $u_0 \neq 0$ . Si usamos

$$\omega_0 + u_0 A_1 = 0, \quad A_k = 0, \quad k = 2, \dots, n. \quad (3.32)$$

Con la relación (3.6) podemos reescribir las ecuaciones como

$$\begin{aligned} \sin \alpha_1 &= \frac{\ell\omega_0}{u_0}, \\ \cos \alpha_1 \sin \alpha_2 &= \frac{\ell\omega_0}{u_0}, \\ &\vdots \\ \prod_{k=1}^{n-1} \cos \alpha_k \sin \alpha_n &= \frac{\ell\omega_0}{u_0}. \end{aligned}$$

Demostraremos por inducción que las soluciones de las ecuaciones de movimiento satisfacen:

$$\cos^2 \alpha_k = \frac{u_0^2 - k\ell^2\omega_0^2}{u_0^2 - (k-1)\ell^2\omega_0^2}, \quad \sin^2 \alpha_k = \frac{\ell^2\omega_0^2}{u_0^2 - (k-1)\ell^2\omega_0^2}, \quad k = 1, \dots, n.$$

Caso  $k = 1$

De (3.3) se sigue de forma trivial la igualdad buscada para  $\sin^2 \alpha_1$ ; con el teorema de Pitágoras podemos encontrar la expresión para  $\cos^2 \alpha_1$ , con lo que tenemos la segunda igualdad deseada. Por lo tanto podemos suponer que la fórmula es válida para  $k$  y demosremos que también lo es para  $k + 1$ . Sustituyendo en la ecuación (3.3) los valores de  $\cos \alpha_j$  dados por la hipótesis de inducción, tenemos que

$$\frac{\ell\omega_0}{u_0} = \prod_{j=1}^{k-1} \cos \alpha_j \sin \alpha_k = \prod_{j=1}^{k-1} \sqrt{\frac{u_0^2 - j\ell^2\omega_0^2}{u_0^2 - (j-1)\ell^2\omega_0^2}} \sin \alpha_k = \sqrt{\frac{u_0^2 - (k-1)\ell^2\omega_0^2}{u_0^2}} \sin \alpha_k. \quad (3.33)$$

Con lo cual llegamos a uno de los resultados deseados. La expresión para el  $\cos \alpha_k$  se encuentra de forma análoga.

Concluimos que una condición necesaria para la existencia de puntos de equilibrio es

$$\frac{\ell^2\omega_0^2}{u_0^2 - (n-1)\ell^2\omega_0^2} \leq 1,$$

lo cual equivale a (3.31). Esta condición también es suficiente para ver que si (3.32) se cumple (y  $a = 0$ ), la ecuación para  $\dot{u}$  del sistema (3.1) queda como

$$\dot{u} = \frac{1}{R} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial R}{\partial \alpha_1} + \frac{Q}{\ell^2} \right) u_0 \omega_0.$$

Pero el lado derecho de la ecuación es cero por (3.18).  $\square$

Las ecuaciones para  $x$ ,  $y$  y  $\theta$  en (3.12) demuestran que los puntos de equilibrio con  $u_0, \omega_0 \neq 0$  dan el movimiento del carro  $\mathcal{B}_0$  a lo largo de un círculo de radio  $\frac{u_0}{\omega_0}$  con velocidad angular constante. La proposición (3.3.1) muestra que los radios de estos círculos son mayores que  $\sqrt{n}\ell$ .

Es importante decir que no estudiamos la estabilidad del sistema en este caso, pero es un problema abierto bastante interesante por hacer.

### 3.4. El caso de un trailer.

El caso  $n = 1$  es particularmente interesante pues si  $a = 0$  podemos denotar a  $\alpha_1 = \alpha$  y tenemos que

$$R(\alpha) = M + m \cos^2 \alpha + \frac{J}{\ell^2} \sin^2 \alpha.$$

Con esto las ecuaciones (3.1) quedan como

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{(m\ell^2 - J)u \cos \alpha \sin \alpha (\ell\omega - u \sin \alpha)}{\ell((M + m \cos^2 \alpha)\ell^2 + J \sin^2 \alpha)}, \\ \dot{\omega} &= 0, \\ \dot{\alpha} &= \omega - \frac{u \sin \alpha}{\ell}. \end{aligned} \tag{3.34}$$

Sin embargo, por razones físicas del problema tenemos que

$$J < m\ell^2. \tag{3.35}$$

La ecuación 3.34 nos dice que  $\omega$  es constante. La energía para este sistema está dado por

$$E = \frac{1}{2} \left( (M + m \cos^2 \alpha + \frac{J}{\ell^2} \sin^2 \alpha) u^2 + (J_0 + M a^2) \omega^2 \right) \tag{3.36}$$

con lo cual vemos que las subvariedades de energía para  $E$  y  $\omega$  son círculos parametrizados por  $\alpha$

$$u = \pm \sqrt{\frac{2E - J_0 \omega^2}{R(\alpha)}}.$$

El análisis cualitativo que haremos es análogo para los casos donde  $\omega$  es positiva o negativa por lo que en esta sección pensaremos que  $\omega_0 > 0$ . Estudiaremos el comportamiento del flujo a lo largo de los círculos invariantes.

$$u = \sqrt{\frac{2E - J_0\omega_0^2}{R(\alpha)}}. \quad (3.37)$$

La dinámica de  $\alpha$  a lo largo de un círculo esta dada por

$$\dot{\alpha} = \frac{\ell\sqrt{R(\alpha)}\omega_0 - \sqrt{2E - J_0\omega_0^2} \sin \alpha}{\ell\sqrt{R(\alpha)}} \quad (3.38)$$

con lo que podemos reducir a cuadraturas

$$\frac{\ell\sqrt{R(\alpha)} d\alpha}{\ell\omega_0\sqrt{R(\alpha)} - \sqrt{2E - J_0\omega_0^2} \sin \alpha} = dt. \quad (3.39)$$

Notemos que la desigualdad (3.35) es equivalente a  $\frac{J}{\ell^2} < m$ , lo que implica

$$M + \frac{J}{\ell^2} \leq R(\alpha) \leq M + m.$$

y si usamos (3.37) y la desigualdad, obtendremos la siguiente relación

$$\begin{aligned} u^2 - \ell^2\omega_0^2 &= \frac{2E - J_0\omega_0^2}{R(\alpha)} - \ell^2\omega_0^2 \\ &\leq \frac{2E - J_0\omega_0^2}{M + \frac{J}{\ell^2}} - \ell^2\omega_0^2 \\ &= \frac{2(E - E_c)}{M + \frac{J}{\ell^2}} \end{aligned}$$

donde

$$E_c := \frac{1}{2} (J_0 + J + M\ell^2) \omega_0^2.$$

Así, concluimos que la dinámica de los círculos invariantes (3.37) sólo depende de cómo es  $E$  con respecto a  $E_c$ .

**caso 1.**  $\frac{1}{2}J_0\omega_0^2 \leq E < E_c$ .

Con la relación 3.31 (o directo de (3.34)) vemos que la ecuación no tiene puntos de equilibrio para este caso; la dinámica a lo largo del círculo (3.37) es periódica. La energía depende del período  $T = T(E)$  y la expresión la obtenemos de (3.39):

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{\ell\sqrt{R(\alpha)} d\alpha}{\ell\omega_0\sqrt{R(\alpha)} - \sqrt{2E - J_0\omega_0^2} \sin \alpha}. \quad (3.40)$$

Gracias a que  $E < E_c$  podemos estar seguros de que el denominador nunca se anula y la integral es finita.

**Caso 2.**  $E = E_c$ . Para este caso tenemos exactamente un sólo punto de equilibrio a lo largo del círculo invariante (3.37) dada por el punto

$$u = \ell\omega_0, \quad \alpha = \frac{\pi}{2}.$$

donde este círculo invariante consiste de una trayectoria homoclínica y el punto de equilibrio.

**Caso 3.**  $E > E_c$ .

Tenemos

$$0 < \frac{\ell^2 \omega_0}{2E - J_0 \omega_0^2} < \frac{\ell^2 \omega_0}{2E_c - J_0 \omega_0^2} = \frac{\ell^2}{J + M \ell^2}. \quad (3.41)$$

La gráfica de la función

$$f(\alpha) = \frac{\sin^2 \alpha}{R(\alpha)},$$

para  $0 \leq \alpha \leq \pi$  está mostrado en la figura 3.3. Notemos que  $f(\alpha)$  es simétrico respecto a  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  y su valor máximo es  $\frac{\ell^2}{J + M \ell^2}$ . La función toma todos los valores entre 0 y  $\frac{\ell^2}{J + M \ell^2}$  sólo dos veces. De la ecuación (3.41) vemos que existen exactamente dos valores de  $\alpha$ , lo cuales denotaremos por  $\alpha^{(1)}$  y  $\alpha^{(2)}$ , tales que

$$0 < \alpha^{(1)} < \frac{\pi}{2} < \alpha^{(2)} < \pi \quad \text{y} \quad f(\alpha^{(j)}) = \frac{\ell^2 \omega_0}{2E - J_0 \omega_0^2}, \quad j = 1, 2.$$

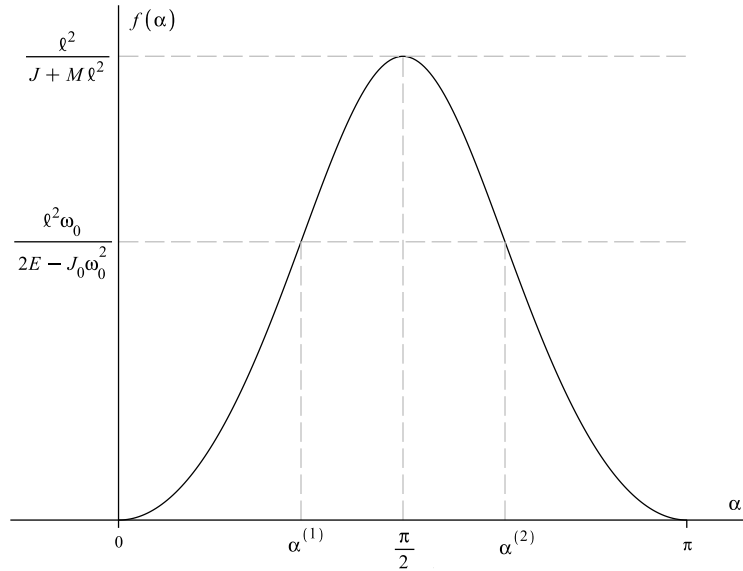


Figura 3.3: Gráfica de  $f(\alpha)$ . La línea horizontal a la altura  $\frac{\ell^2 \omega_0}{2E - J_0 \omega_0^2}$  está dibujada bajo la suposición que  $E > E_c$ .

Un cálculo directo muestra que los 2 puntos

$$\alpha = \alpha^{(j)}, \quad u = \frac{\omega_0 \ell}{\sin(\alpha^{(j)})}, \quad j = 1, 2$$

son los únicos puntos de equilibrio contenidos en el círculo invariante (3.37).

Dado que  $\sin(\alpha^{(j)}) > 0$ ,  $j = 1, 2$ , en una vecindad de los puntos de equilibrios, podemos escribir la ecuación de movimiento (3.38) para  $\alpha$  como

$$\dot{\alpha} = \omega_0 - \sqrt{2E - J_0 \omega_0^2} \sqrt{f(\alpha)}.$$

Gracias a que  $f$  es creciente para  $\alpha^{(1)}$  y decreciente para  $\alpha^{(2)}$  concluimos que los puntos de equilibrio

$$\alpha = \alpha^{(j)}, \quad u = \frac{\omega_0 \ell}{\sin(\alpha^{(j)})} \tag{3.42}$$

el comportamiento es asintóticamente estable si  $j = 1$  y asintóticamente inestables si  $j = 2$ . Podemos observar en la figura 3.4 la interpretación física. Para este caso el círculo invariante

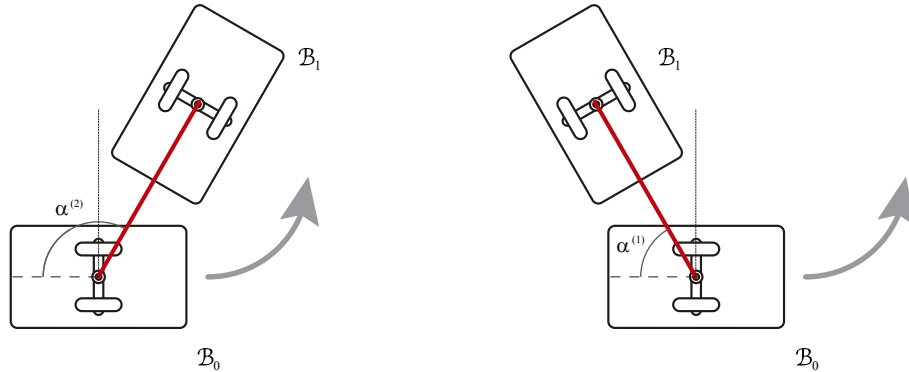


Figura 3.4: La figura ilustra la estabilidad y inestabilidad de los puntos de equilibrio si  $E > E_c$ . La configuración del lado izquierdo es inestable y la del lado derecho es estable. Las flechas indican las dirección del movimiento de  $\mathcal{B}_0$  (también tenemos la suposición de que  $u, \omega_0 > 0$ ).

(3.37) consiste de 2 trayectorias heteroclínicas tales que conectan el punto inestable con el estable.

La Figura 3.5 ilustra las distintas dinámicas cualitativamente hablando de los círculos invariantes (3.37) en los tres diferentes rangos de energía con los comportamientos antes mencionados. La figura 3.6 ilustra la dinámica de (3.34) sobre los cilindros  $\omega = \omega_0 > 0$ .

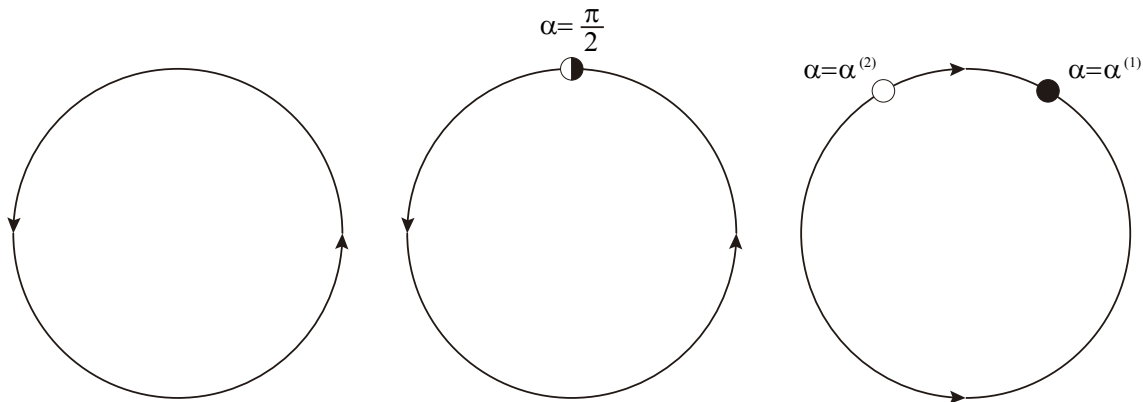


Figura 3.5: Se muestra el comportamiento cualitativo de la dinámica a lo largo de círculos invariantes (3.37) para diferentes rangos de energía,  $E < E_c$  del lado izquierdo,  $E = E_c$  en medio y  $E > E_c$  en la derecha.

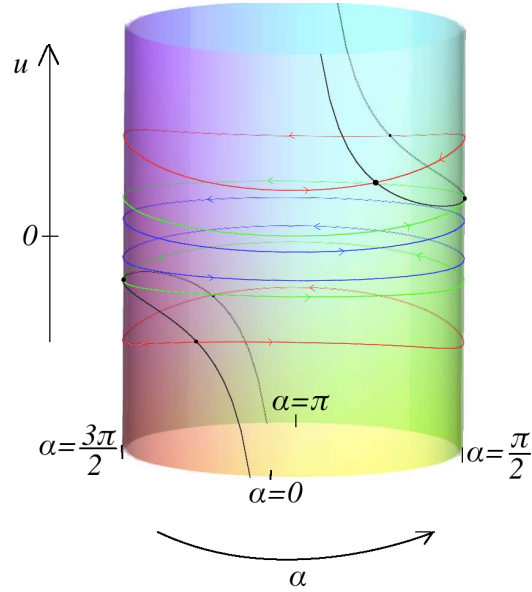


Figura 3.6: Dinámica en el cilindro  $\omega = \omega_0 > 0$ . El eje vertical es  $u$  y la variable angular  $\alpha$ . Se muestra el movimiento que toman los círculos invariantes. Los puntos de equilibrio forman la curva negra, la trayectoria azul tiene  $E < E_c$ , la gris  $E = E_c$ , y la roja  $E > E_c$ .

Resumiendo llegamos a que  $E_c$  es un valor de energía crítico que separa dos diferentes comportamientos. Los niveles de energía por debajo de  $E_c$  que nos da un movimiento periódico en el espacio reducido, y en el otro caso cuando la energía está por arriba de  $E_c$  corresponde a un comportamiento asintótico en el espacio reducido. Un comportamiento similar se observa en el movimiento del trineo de Chaplygin en un fluido perfecto en presencia de circulación [3].

### Reconstrucción del Movimiento en el Plano

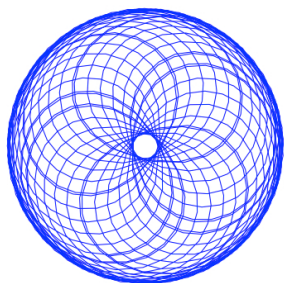
Ahora reconstruimos la dinámica del convoy con un trailer en el plano. Notemos que en la ausencia del trailer  $\mathcal{B}_1$  (i.e. si  $m = 0$  y  $J = 0$ ) tenemos  $u = u_0$ ,  $\omega = \omega_0$  para alguna constante  $u_0$  y  $\omega_0$ . Por lo tanto, el movimiento de  $\mathcal{B}_0$  en el plano para condiciones iniciales genéricas es un círculo de radio  $r = \frac{u_0}{|\omega_0|}$ .

En la sección anterior mostramos que si  $E \geq E_c$  en el límite cuando  $t \rightarrow \pm\infty$  el 2-cuerpo convoy en el plano se aproxima a un movimiento circular uniforme. Considerando siempre que  $u, \omega_0 > 0$ , de (3.42) podemos concluir que el radio del círculo límite es

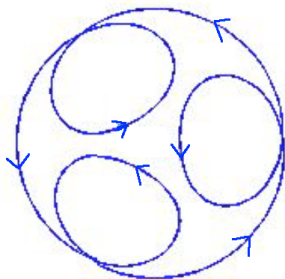
$$r = \frac{\ell}{\sin \alpha^{(1)}} = \frac{\ell}{\sin \alpha^{(2)}}.$$

Con esto vemos que el valor de  $\sin \alpha^{(1)} = \sin \alpha^{(2)}$  es decreciente y se aproxima a 0 cuando la energía  $E \rightarrow \infty$  por lo tanto  $r \rightarrow \infty$  cuando  $E \rightarrow \infty$ . La figura 3.7 muestra la trayectoria del carro obtenida de forma numérica. El trailer  $\mathcal{B}_1$  tiende a un ángulo constante con respecto a  $\mathcal{B}_0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ . El límite de los ángulos es  $\alpha^{(2)}$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y  $\alpha^{(1)}$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

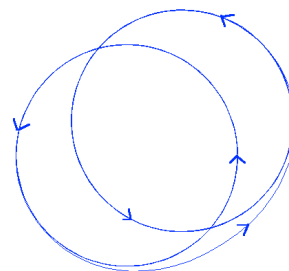
Por otro lado, si  $0 < E < E_c$ , la dinámica de  $\alpha$  y  $u$  es periódica con período (3.40). Después de un período, la posición del carro principal  $\mathcal{B}_0$  sufre una rotación por un ángulo



(a)  $E < E_c$ . Trayectoria genérica cuasi-periódica.



(b)  $E < E_c$ . Trayectoria periódica.



(c)  $E > E_c$ . Comportamiento asintótico hacia los círculos límite.

Figura 3.7: Trayectorias trazadas por el carro  $\mathcal{B}_0$  para distintos valores de la energía.

$\Delta\theta = \omega_0 T$ , seguida de una traslación por  $(\Delta x, \Delta y)$  con

$$\Delta x + i\Delta y = \int_0^T u(t)e^{i\omega_0 t} dt = \sqrt{2E - J_0\omega_0^2} \int_0^T \frac{e^{i\omega_0 t}}{\sqrt{R(\alpha(t))}} dt,$$

donde la dependencia de  $\alpha$  sobre  $t$  está determinada por (3.39) y supondremos que  $\theta(0) = 0$ .

Genéricamente, el ángulo  $\Delta\theta$  es un irracional múltiplo de  $2\pi$  y el movimiento de  $\mathcal{B}_0$  en el plano es cuasi-periódico con trayectoria contenida en un anillo o en un círculo. Es también posible encontrar un comportamiento periódico si  $\frac{\Delta\theta}{2\pi} \in \mathbb{Q}$  o trayectorias no acotadas si  $\frac{\Delta\theta}{2\pi} \in \mathbb{Z}$  y  $\Delta x^2 + \Delta y^2 \neq 0$ . La Figura 3.7 muestra trayectorias periódicas y cuasi-periódicas para  $\mathcal{B}_0$  obtenidas numéricamente.

# Apéndice A

## Configuraciones Singulares

El *grado de no holonomía* es una noción importante que surge de la teoría de control no lineal. Esta mide el número de pasos en los cuales calculamos el conmutador de todas las posibles parejas de la base de una distribución  $\mathcal{D}$  y definimos una nueva distribución como el generado por la unión de la base de  $\mathcal{D}$  con los campos dados por los conmutadores de las parejas de la base; repetimos el paso con la nueva distribución hasta generar todo el espacio tangente en cada punto del espacio de configuraciones. El número de pasos descrito por procedimiento anterior es llamado "grado de holonomía". Si una distribución es integrable nunca podremos generar todo el espacio tangente, en este caso decimos que su grado de holonomía es infinito. Por lo tanto mientras mas grande sea el "grado de holonomía" se considera que el sistema está más cerca de ser integrable; este concepto nace del intento por cuantificar la complejidad asociada con la restricción del sistema de un punto a otro (Ver [11]).

Cuando el número de trailer en nuestro sistema es mayor o igual que dos, el grado de no holonomía cambia; es decir, no es constante en todo el espacio de configuraciones. Para fijar ideas trataremos en detalle el caso  $n = 2$

$$Z_1 = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\sin \alpha_1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} + \left( \frac{\sin \alpha_1 - \cos \alpha_1 \sin \alpha_2}{\ell} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad Z_2 = \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial \alpha_1},$$

estos campos forman una base de la distribución  $\mathcal{D}$ . Un cálculo directo muestra que

$$[Z_1, Z_2] = \sin \theta \frac{\partial}{\partial x} - \cos \theta \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\cos \alpha_1}{\ell} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \left( \frac{\cos \alpha_1 + \sin \alpha_1 \sin \alpha_2}{\ell} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2},$$

con lo cual construimos la nueva distribución

$$\mathcal{D}_1 := \text{span}\{Z_1, Z_2, [Z_1, Z_2]\},$$

el cual es un conjunto linealmente independiente pero no genera a  $T_q Q$  por lo que repetiremos el paso una vez más

$$[Z_1, [Z_1, Z_2]] = \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \left( \frac{1 + \cos \alpha_2}{\ell^2} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad [Z_2, [Z_1, Z_2]] = Z_1. \quad (\text{A.1})$$



Vemos que  $[Z_2, [Z_1, Z_2]] \in \mathcal{D}_2$  por lo que no genera nada nuevo y definimos nuevamente

$$D_2 := \text{span}\{Z_1, Z_2, [Z_1, Z_2], [Z_1, [Z_1, Z_2]]\}. \quad (\text{A.2})$$

Repitiendo el proceso tenemos

$$[Z_1, [Z_1, [Z_1, Z_2]]] = \frac{\cos \alpha_1}{\ell^3} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \cos \alpha_1 \left( \frac{2 + \cos \alpha_2}{\ell^3} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}, \quad [Z_2, [Z_1, [Z_1, Z_2]]] = 0.$$

El lector podrá comprobar que el conjunto  $\{Z_1, Z_2, [Z_1, Z_2], [Z_1, [Z_1, Z_2]], [Z_1, [Z_1, [Z_1, Z_2]]]\}$  es una base de  $T_q Q$  siempre que  $\cos \alpha_1 \neq 0$ . En este caso el grado de holonomía es 4. Por otro lado cuando  $\cos \alpha_1 = 0$  tenemos  $[Z_1, [Z_1, [Z_1, Z_2]]] = 0$  por lo que es necesario repetir el paso una vez más

$$[[Z_1, Z_2], [Z_1, [Z_1, Z_2]]] = \frac{\sin \alpha_1}{\ell^3} \frac{\partial}{\partial \alpha_1} - \sin \alpha_1 \left( \frac{2 + \cos \alpha_2}{\ell^3} \right) \frac{\partial}{\partial \alpha_2}.$$

Con esto concluimos que si  $\cos \alpha_1 = 0$  el grado de holonomía es 5.

La configuración anterior es llamada singular y corresponde a la configuración donde  $\mathcal{B}_0$  y  $\mathcal{B}_1$  son perpendiculares. Intuitivamente es claro que es esta configuración tiene problemas dado que si  $\mathcal{B}_0$  se mueve en la dirección del eje, esta es la velocidad no admisible para  $\mathcal{B}_1$  (Creo que todos hemos tenido el problema de quedar atrapados en el tráfico por que un trailer que le costó mucho trabajo dar la vuelta en 90 grados en una calle angosta).

# Bibliografía

- [1] Blonch M. nonholomic Mechanics and control, *Newyork: Springer*, (2003).
- [2] Chaplygin, S. A., On the theory of motion of nonholonomic systems. The theorem on the reducing multiplier. *Mathematics. Sbornik* **XXVIII** 303–14 (1911) (in Russian)
- [3] Fedorov Y. N., García-Naranjo L. C. and Vankerschaver J., The motion of the 2D hydrodynamic Chaplygin sleigh in the presence of circulation. *Discontinuous and Continuous Dynamics System. Series A* **33** no. 9, 4017–4040, (2013).
- [4] Fedotov A. B. and Furta S. D., On stability of motion of a chain of  $n$  driven bodies. *Reg. Chaot. Dyn.* **7** 249–268, (2002).
- [5] Ize J. Calculos de las varaciones, *Publicaciones IIMAS*, (2002).
- [6] Grabowski, J., de León, M., Marrero, J. C. and Martín de Diego, D. Nonholonomic constraints: a new viewpoint. *Journal Mathematics Physics.* **50**, 013520, 17 pp, (2009).
- [7] Jean, F., The car with  $N$  Trailers: characterization of the singular configurations. *ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations*, **1**, 241–266, 1996.
- [8] Lamiriaux, F., Sekhavat, S. and Laumond, J.P. Motion Planning and Control for Hilar Pulling a Trailer. *Robotics and Automatisation, IEEE Transactions on*, 640–652, **15** (1999).
- [9] Landau L. D. and Lifshitz E. M. *Mechanics* 3rd edn (Oxford:Butterworth-Heinemann) 1976.
- [10] Laumond, J.P. Controllability of multibody mobile robot. *IEEE Trans. Robot. Automat.*, 755–763, **9** (1993).
- [11] Laumond J.P. *Robot motion planning and control*. Springer, N.ISBN 3-540-76219-1 (1998).
- [12] Montgomery R. and Zhitomirskii, M., Geometric approach to Goursat flags, *Ann. I. H. Poincaré - AN.* 459–493, **18** (2001).
- [13] Neimark Ju I and Fufaev N A *Dynamics of Nonholonomic Systems (Translations of Mathematical Monographs vol 33)* (Providence, RI: American Mathematical Society), (1972).

- [14] Osborne J. and Zenkov, D., Steering the Chaplygin sleigh using a moving mass, *Proceeding on the Conference on Decision and Control (CDC-ECC)*, (2005).
- [15] Pelletier F. and Slayman M., Configurations of an Articulated Arm and Singularities of Special Multi-Flags. *SIGMA* **10**, 38 pages, 059 (2014).
- [16] Tilbury D., Murray R., and Sastry S. S., Trajectory generation for the  $N$ -trailer problem using Goursat normal form, Memo. UCB/ERL M93/12, Berkeley, CA, Feb. 1993.